



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astrónomicas y Geofísicas

Tesis de grado en Geofísica

PROSPECCIÓN ELECTROMAGNÉTICA POR FUENTES CONTROLADAS.

Alumno: Franco Sebastián Macchioli Grande

Director: Dr. Fabio Iván Zyserman

LA PLATA, ARGENTINA
- 26 DE MARZO DE 2015 -

A Ana, Marcos y Lisa

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
2. El método de Prospección Electromagnética por Fuentes Controladas	3
2.1. Ecuaciones de los campos electromagnéticos	3
2.2. Campos primarios y secundarios	6
3. Modelado bidimensional	8
3.1. Introducción	8
3.2. Cálculo de los campos primarios	10
3.2.1. Modo TM	10
3.2.2. Modo TE	10
3.3. Cálculo de los campos secundarios	11
3.3.1. El modo TM	12
3.3.2. El modo TE	17
4. Resultados	19
4.1. Campos primarios en modo TM y TE	19
4.2. Campos secundarios en modo TM y TE	20
4.2.1. Modo TM	21
4.2.2. Modo TE	21
4.3. Análisis de un reservorio petrolífero off-shore	21
5. Conclusiones	43
Bibliografía	46

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Los métodos geofísicos de prospección están orientados al estudio del subsuelo terrestre y se caracterizan por determinar de forma indirecta diversas propiedades del mismo, tales como la densidad, la porosidad, la conductividad eléctrica, entre muchas otras.

En particular, la prospección electromagnética se encarga de estudiar la estructura del subsuelo de una determinada región a partir de la medición de los campos electromagnéticos en superficie, quienes dan información sobre cómo son las distribuciones de conductividad eléctrica en el interior terrestre. Existen dos tipos principales de métodos, de acuerdo al origen de la fuente: pasivos y activos (fig. 1.1). Los métodos pasivos, entre los que se encuentra la Magnetotelúrica, son aquellos que utilizan como fuente variaciones naturales de los campos electromagnéticos, producto de tormentas eléctricas para frecuencias por encima de 1 Hz y provenientes de corrientes generadas en la magnetósfera para frecuencias menores. Los métodos activos emplean fuentes de origen artificial, como una antena o un bucle de corriente, siendo un método de este tipo la Prospección Electromagnética por Fuentes Controladas (CSEM son sus siglas en inglés), en que está basada la presente Tesis de grado y que presenta como característica que las fuentes además de ser artificiales son controladas por el usuario.

El método posee grandes ventajas, principalmente la menor sensibilidad al ruido y la posibilidad de elegir con qué frecuencias trabajar. Para frecuencias altas (o correspondientemente períodos bajos), las señales de la Magnetotelúrica tienen poca energía, generando que el ruido sea alto. Por esto, se recurre a las fuentes controladas. En general se miden dos o tres componentes del campo magnético y dos componentes (horizontales) del campo eléctrico. Eidesmo et al. (2002) y Ellingsrud et al. (2002) describen esta técnica a través del siguiente ejemplo: una señal electromagnética de baja frecuencia es emitida por un dipolo horizontal hacia el lecho marino y los sedimentos subyacentes. El campo electromagnético se difunde a través de la columna sedimentaria y es atenuado rápidamente debido a la baja resistividad del fluido poral salino. Si el campo encuentra una capa de alta resistividad y la penetra con un ángulo crítico de incidencia, la energía es transportada a lo largo de la capa con un grado significativamente bajo de atenuación y es constantemente refractada hacia el lecho marino, donde es captada por receptores

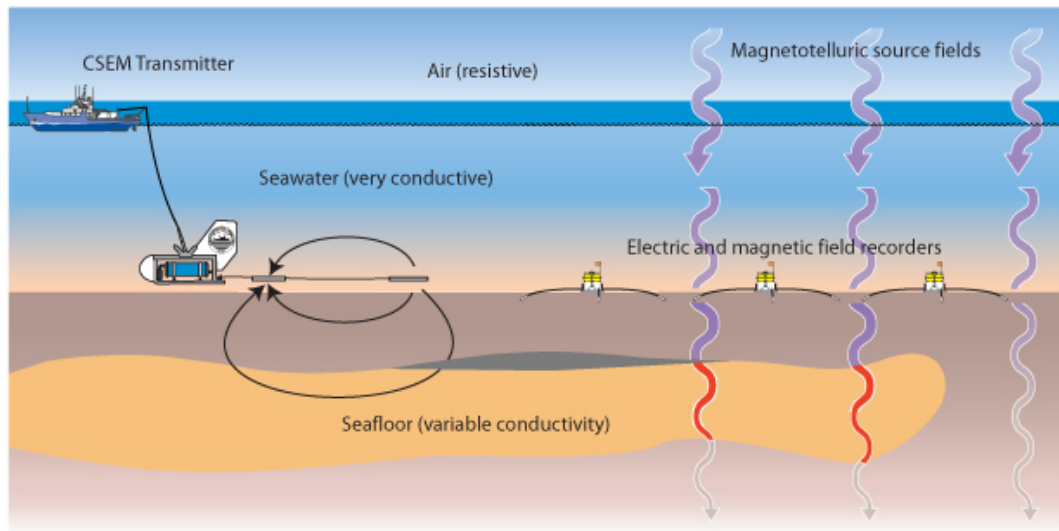


Figura 1.1: Fuentes naturales y artificiales de los campos EM.

electromagnéticos. La detección de esta energía es la base del método. Si bien la exploración de yacimientos petrolíferos es la que le ha dado mayor vuelo al método en cuestión, este puede usarse tanto en la tierra como en el mar.

La metodología de trabajo requiere la resolución de dos tipos de problema: el directo y el inverso. El problema directo, en el que está centrado el presente trabajo, involucra el cálculo de los campos electromagnéticos asociados a una geometría y una distribución de conductividades planteadas a priori. El problema inverso busca ajustar los valores de los campos provenientes de resolver el problema directo con los datos observados, tanto en superficie como en profundidad.

Ambas etapas requieren de herramientas computacionales sofisticadas, de manera que se puedan estudiar escenarios geológicos complejos. En nuestro caso, se empleará una formulación matemática basada en el método de elementos finitos y técnicas iterativas de descomposición de dominio. Los algoritmos están diseñados para trabajar en computadoras paralelas, lo que disminuye enormemente los tiempos de cálculo.

La Tesis consistirá en la resolución de las ecuaciones que responden al comportamiento de los campos electromagnéticos generados por fuentes artificiales y bajo una configuración determinada de conductividades en el subsuelo, seguido de un análisis de las respuestas de los campos así como el comportamiento de los algoritmos.

La motivación del presente trabajo se apoya en los trabajos precedentes en modelado numérico en Magnetotelúrica, que han servido como puntapié inicial para los primeros pasos en la prospección por fuentes controladas, brindando herramientas computacionales idóneas para su realización. El método CSEM es ampliamente usado en la exploración minera y de reservorios petrolíferos, por lo que resulta sumamente interesante explorar sus alcances, buscando en un futuro llevarlo a otro tipo de aplicaciones, vinculadas a la geotermia, estudio de anisotropías en el subsuelo, entre muchos otros.

CAPÍTULO 2

EL MÉTODO DE PROSPECCIÓN ELECTROMAGNÉTICA POR FUENTES CONTROLADAS

El método de prospección electromagnética por fuentes controladas (en adelante CSEM), surgió a partir de estudios académicos de la litósfera oceánica en la década de 1980, aunque no fue hasta fines de la década de 1990 en que empezó a tomar vuelo con estudios de resistividad de ciertas áreas elegidas para realizar perforaciones. Ensayos off-shore en Angola en el período 2000-2002 mostraron que los datos aportados por CSEM podían ser usados exitosamente para evaluar la resistividad de reservorios petrolíferos a profundidades de varios miles de metros (Constable y Srnka, 2007). Recientes trabajos como S. Fanavoll y Ellingsrud (2014), Stefatos et al. (2014) y L.O. Loseth y Hansen (2014) destacan la capacidad de CSEM como herramienta para la exploración de hidrocarburos, en particular aplicado en la zona marítima de Noruega.

2.1. Ecuaciones de los campos electromagnéticos

La teoría de la prospección electromagnética fue desarrollada a partir de las leyes que gobiernan el comportamiento de los campos electromagnéticos en una Tierra conductiva e inhomogénea. Las ecuaciones de Maxwell, que son la formulación matemática del comportamiento de estos campos, son la base de esta teoría (Griffiths, 1999). Las ecuaciones de Maxwell consisten en dos ecuaciones vectoriales y dos escalares:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1d)$$

donde

\mathbf{E} = intensidad de campo eléctrico (V/m),
 \mathbf{D} = desplazamiento eléctrico (C/m²),
 \mathbf{H} = intensidad de campo magnético (A/m),
 \mathbf{B} = inducción magnética (Wb/m),
 \mathbf{J} = densidad de corriente eléctrica (A/m²),
 ρ = densidad de carga eléctrica (C/m³).

Juntamente con las ecuaciones anteriores debemos considerar la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.2)$$

que establece la ley de conservación de la carga eléctrica. Sólo tres de estas cinco ecuaciones son independientes, de modo tal que para hacer al sistema definido debemos introducir las relaciones constitutivas que pueden ser escritas, siempre que la magnitud de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} y la de sus derivadas temporales no sean muy grandes -como es nuestro caso- como:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.3c)$$

A través de estas ecuaciones, el medio es caracterizado desde el punto de vista electromagnético por la permitividad eléctrica ϵ (F/m), la permeabilidad magnética μ (H/m) y la conductividad eléctrica σ (S/m); estas cantidades son tensores en caso de ser el medio anisótropo, y escalares en caso de isotropía.

Ahora bien, en los bordes entre distintas regiones de la Tierra, los valores de ϵ , μ y σ probablemente cambien abruptamente. Esto implica un cambio discontinuo en los campos electromagnéticos, en virtud de las relaciones constitutivas mencionadas. Por lo tanto, a las ecuaciones de Maxwell es necesario agregarle condiciones de borde que relacionen los valores de los campos en puntos inmediatamente adyacentes, en cada lado del borde a través del cual las propiedades se espera cambien abruptamente. Podemos formular condiciones de borde que funcionan para un gran número de casos, que consisten en una superficie S separa dos medios en que ϵ , μ y σ son constantes, o varían espacialmente tan lentamente que en una pequeña región alrededor de un punto pueden considerarse constantes. Usando las ecuaciones de Maxwell y aplicando los teoremas de Stokes y Gauss en regiones de espesor infinitesimal vinculadas a S , se obtienen las siguientes condiciones

de borde:

$$\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (2.4a)$$

$$\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad (2.4b)$$

$$\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.4c)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = q_s, \quad (2.4d)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial q_s}{\partial t} \quad (2.4e)$$

donde q_s es la densidad superficial de carga y \mathbf{J}_s es la densidad superficial de corriente, que es nula cuando la conductividad en ambos medios es finita.

Podemos enumerar ahora una serie de suposiciones que suelen hacerse al utilizar el método CSEM, que permiten simplificar las ecuaciones que hemos escrito hasta aquí:

- La permeabilidad magnética del suelo es del orden de la del vacío en la mayoría de los casos; se considera entonces $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, excepto en presencia de magnetitas donde esta hipótesis no es válida.
- Por simplicidad, los medios se consideran isótropos, pero no necesariamente homogéneos.
- Se asume una dependencia temporal armónica de los campos, puesto que siendo las ecuaciones a resolver lineales, toda otra dependencia temporal puede considerarse como una superposición de ondas armónicas.
- En el rango de conductividades encontradas en la Tierra, de 10^{-3} a 1 S/m, y considerando que las frecuencias de interés varían entre 10^{-3} y 10^4 Hz, vale siempre que

$$\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \ll 1,$$

con lo que podemos despreciar las corrientes de desplazamiento frente a las de conducción y el problema que nos ocupa ya no es de propagación de ondas en el subsuelo, sino de su difusión al interior de la Tierra.

- Consideramos ϵ y σ reales e independientes de la frecuencia, o equivalentemente que los medios no son dispersivos.

Con estas suposiciones y asumiendo que hay una corriente externa debida a las fuentes artificiales, las ecuaciones a resolver son las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} = 0, \quad (2.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \sigma\mathbf{E} = \mathbf{J}_e \quad (2.5b)$$

donde el subíndice e significa externa, refiriéndose al origen de la fuente.

2.2. Campos primarios y secundarios

Para facilitar los cálculos y aprovechar las soluciones analíticas existentes, los campos electromagnéticos y las propiedades del medio se descomponen en dos componentes: una primaria y una secundaria. Los campos electromagnéticos primarios son aquellos que tienen solución analítica en una región de conductividad homogénea. Los campos secundarios pueden pensarse como perturbaciones de los campos primarios causadas por anomalías en la conductividad, y son calculados numéricamente.

Se tiene entonces que:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s, \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_s, \quad (2.6b)$$

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_s \quad (2.6c)$$

donde los subíndices p y s indican primario y secundario, respectivamente.

Entonces, nuestro problema consta de dos partes; la primera consistirá en la resolución de las siguientes ecuaciones para los campos primarios:

$$\nabla \times \mathbf{E}_p + i\omega\mu\mathbf{H}_p = 0, \quad (2.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_p - \sigma_p\mathbf{E}_p = \mathbf{J}_e. \quad (2.7b)$$

En este sistema de ecuaciones, la simetría espacial de la fuente y la distribución de conductividad son elegidos de formas tal que la solución a las mismas puede encontrarse analíticamente.

Para la segunda parte de la resolución, vamos a reescribir las ecuaciones para el campo total, pero en función de los campos primarios y secundarios:

$$\nabla \times (\mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s) + i\omega\mu(\mathbf{H}_p + \mathbf{H}_s) = 0, \quad (2.8a)$$

$$\nabla \times (\mathbf{H}_p + \mathbf{H}_s) - (\sigma_p + \sigma_s)(\mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s) = \mathbf{J}_e. \quad (2.8b)$$

Si distribuimos los operadores para cada componente y reordenamos los términos, tenemos:

$$\nabla \times \mathbf{E}_p + i\omega\mu\mathbf{H}_p + \nabla \times \mathbf{E}_s + i\omega\mu\mathbf{H}_s = 0, \quad (2.9a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_p - \sigma_p\mathbf{E}_p + \nabla \times \mathbf{H}_s - \sigma_s\mathbf{E}_p - \sigma\mathbf{E}_s = \mathbf{J}_e. \quad (2.9b)$$

En la primera ecuación, los dos primeros términos suman cero, y en la segunda, los dos primeros términos suman \mathbf{J}_e , por lo que podemos cancelarlo con el segundo miembro. Entonces, la resolución numérica del problema compete a las siguientes ecuaciones para los campos secundarios:

$$\nabla \times \mathbf{E}_s + i\omega\mu\mathbf{H}_s = 0, \quad (2.10a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s - \sigma\mathbf{E}_s = \sigma_s\mathbf{E}_p. \quad (2.10b)$$

Podemos interpretar de las ecuaciones anteriores que, para los campos secundarios, la fuente es una densidad de corriente dada por el producto de la conductividad secundaria (correspondiente a los cuerpos anómalos) por el campo eléctrico primario. Las ecuaciones para los campos secundarios representan lo que se conoce como *formulación fuerte* del problema. Para poder resolverlo numéricamente, se recurre a la aplicación del método de elementos finitos, a través del cual el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es transformado en un número finito de sistemas de ecuaciones lineales, lo que recibe el nombre de *formulación débil*. Además, para que los campos tengan solución única, se requieren condiciones iniciales y de borde, que serán detalladas en el siguiente capítulo, al igual que el método numérico en cuestión.

CAPÍTULO 3

MODELADO BIDIMENSIONAL

En este capítulo desarrollaremos la resolución de las ecuaciones para los campos primarios y secundarios, de forma analítica y numérica respectivamente. Seguimos en el primer caso fundamentalmente a Ward y Hohmann (1987) y en el segundo a Zyserman et al. (1999) y Zyserman (2000).

3.1. Introducción

Consideremos las ecuaciones (2.5) en un dominio rectangular bidimensional Ω . El medio es inhomogéneo, con dos conductividades: una primaria, que ocupa la mayor parte del dominio Ω y una anomalía, que podrá ser resistiva o conductiva respecto de la primaria, que será expresada como la suma de la conductividad primaria y un contraste de conductividad, de la siguiente manera

$$\sigma(x, z) = \begin{cases} \sigma_p & \text{en } \Omega_p, \\ \sigma_p + \sigma_s(x, z) & \text{en } \Omega_s. \end{cases} \quad (3.1)$$

donde Ω_p representa la porción de dominio correspondiente a la conductividad primaria y Ω_s la porción del dominio ocupada por la anomalía de conductividad (fig. 3.1). Las coordenadas que describen al dominio Ω serán (x, z) , teniendo al eje y como eje de simetría. Suponiendo que tanto fuentes como distribuciones de conductividad y condiciones de borde son independientes de y , la respuesta electromagnética puede ser descripta por dos grupos de ecuaciones desacopladas: el modo TM, donde los campos son de la forma $\mathbf{E} = (E_x(x, z), 0, E_z(x, z))$ y $\mathbf{H} = (0, H_y(x, z), 0)$ y el modo TE, que involucra campos $\mathbf{E} = (0, E_y(x, z), 0)$ y $\mathbf{H} = (H_x(x, z), 0, H_z(x, z))$. En el presente trabajo se emplearon dos tipos de fuentes, ambas de origen eléctrico, asociadas cada una a uno de los modos descriptos: los campos en modo TM corresponden a un dipolo eléctrico oscilante infinito, extendido a lo largo del eje y mientras que los campos en modo TE provienen de usar como fuente un cable infinito sobre el eje y por el cual circula una corriente I de 1 A. Una herramienta fundamental para el cálculo de los campos electromagnéticos son los potenciales de Schelkunoff. Bajo ciertas condiciones, los campos electromagnéticos pueden calcularse como combinaciones de rotores y gradientes de funciones potenciales, escalares

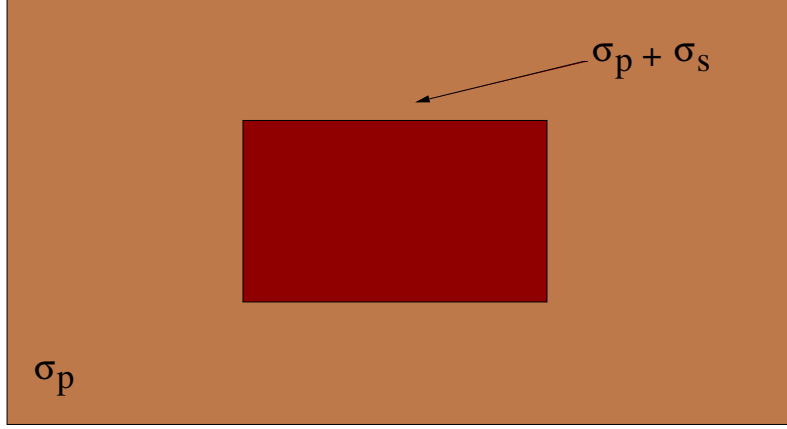


Figura 3.1: Distribución de conductividad.

y vectoriales. Para el caso de una fuente eléctrica, la solución de los campos vendrá dada por el potencial vectorial \mathbf{A} , de la siguiente manera:

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{A} + \sigma^{-1}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}), \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.2b)$$

donde \mathbf{A} es solución de

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}_e \quad (3.3)$$

siendo $k = (-i\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}}$ el número de onda y \mathbf{J}_e la fuente.

Otro concepto clave para representar las fuentes en ambos modos es la función de Green, que es la respuesta ante una fuente dada por la función delta de Dirac $\tilde{\delta}(\mathbf{x})$. En general, las funciones de Green deben mostrar los efectos en contrastes de conductividad, por lo que se obtienen resolviendo un problema de condiciones de borde. Sin embargo, las funciones de Green se obtienen fácilmente si se calculan en todo el espacio, pues en este caso las condiciones de borde implican que los campos se anulen en el infinito. En tal caso, la función de Green se obtiene a partir de la resolución de una ecuación diferencial y recurriendo al uso de una técnica de transformación adecuada.

Es de nuestro interés que la función de Green sea solución de la ecuación de Helmholtz bidimensional:

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\tilde{\delta}(x)\tilde{\delta}(z) \quad (3.4)$$

de manera que el potencial \mathbf{A} estará dado por

$$\mathbf{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.5)$$

3.2. Cálculo de los campos primarios

3.2.1. Modo TM

Para este caso, la densidad de corriente está dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{Ids}{4\pi} \tilde{\delta}(x) \tilde{\delta}(z) \mathbf{u}_z, \quad (3.6)$$

donde la fuente está representada por una sucesión infinita de dipolos extendida a lo largo del eje y (fig. 3.2), con un valor de distancia característica ds de 10^{-2} m.

La función de Green del problema surge de resolver la ecuación (3.4), siendo ésta una función de Bessel modificada de orden cero:

$$G(x, z) = \frac{1}{2\pi} K_0[ik(x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}]. \quad (3.7)$$

Como vimos en la sección anterior, el potencial vectorial \mathbf{A} se calcula como una convolución entre la densidad de corriente y la función de Green del problema, lo que nos lleva a la siguiente expresión:

$$\mathbf{A} = \frac{Ids}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} K_0 ik[(x - x')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}} \delta(x') \delta(z') dx' dz' \mathbf{u}_z, \quad (3.8)$$

que da como resultado

$$\mathbf{A} = \frac{Ids}{8\pi^2} K_0[ik(x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}] \mathbf{u}_z. \quad (3.9)$$

Luego, el campo magnético tendrá solamente componente en y y estará dado por

$$H_y = \frac{ikIds}{8\pi^2} K_1(ik\rho) \frac{x}{\rho}, \quad (3.10)$$

donde

$$\rho = (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

y $K_1(\alpha)$ es la función de Bessel modificada de primer orden, que cumple la relación

$$K'_0(\alpha) = -K_1(\alpha). \quad (3.12)$$

El campo eléctrico estará dado por

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_z \mathbf{u}_z = \frac{k^2 Ids}{8\pi^2 \sigma} \left(\frac{2}{ik\rho} K_1 + K_0(ik\rho) \right) \left\{ \left[K_0(ik\rho) - \frac{x}{\rho} \right] \mathbf{u}_x + \left[\frac{1}{ik\rho} K_1(ik\rho) - \frac{z^2}{\rho^2} \right] \mathbf{u}_z \right\}. \quad (3.13)$$

3.2.2. Modo TE

En este caso, la densidad de corriente para una fuente lineal de corriente 2D está descrita por

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I \tilde{\delta}(x) \tilde{\delta}(z) \mathbf{u}_y \quad (3.14)$$

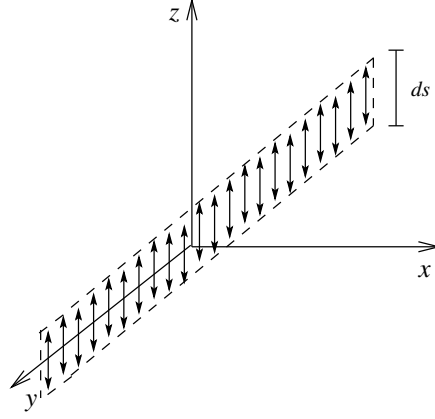


Figura 3.2: Dipolo oscilante infinito: fuente del modo TM. Las flechas en los dipolos representan el cambio en la polaridad.

donde la fuente lineal (cable) está en la dirección de y e intersecta al plano xz en el origen (fig. 3.3).

La función de Green del problema es la misma que en el modo TM.

Reemplazando en (3.5) obtenemos la siguiente expresión para el potencial \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I}{2\pi} K_0 ik [(x - x')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}} \delta(x') \delta(z') dx' dz' \mathbf{u}_y, \quad (3.15)$$

que da como resultado

$$\mathbf{A} = \frac{I}{2\pi} K_0 [ik(x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}] \mathbf{u}_y. \quad (3.16)$$

Como la divergencia de \mathbf{A} es cero, el campo eléctrico tiene solamente componente en y dada por

$$E_y = -\frac{i\omega\mu I}{2\pi} K_0(ik\rho) \quad (3.17)$$

donde ρ está dado por la ecuación (3.11). El campo magnético estará dado por

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{u}_x + H_z \mathbf{u}_z = \frac{ikI}{2\pi} K_1(ik\rho) \left(\frac{z}{\rho} \mathbf{u}_x - \frac{x}{\rho} \mathbf{u}_z \right), \quad (3.18)$$

de acuerdo a la relación (3.12).

3.3. Cálculo de los campos secundarios

En esta sección vamos a seguir los desarrollos presentados en Zyserman (2000). Previo a la formulación de nuestro problema, vamos a introducir alguna notación. Para todo entero no negativo s , $(H^s(\Omega), \|\cdot\|_s)$ denota el espacio de Sobolev usual sobre Ω (Adams, 1976). En particular $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ y $\|\cdot\|_0$ es la norma usual en L^2 , inducida por el producto interno $(v, w)_\Omega = \int_\Omega v \bar{w} dx$, donde la barra indica complejo conjugado. Si Γ está contenida en el borde $\partial\Omega$ del dominio Ω , definimos $\langle v, w \rangle_\Gamma = \int_\Gamma v \bar{w} ds$ para el producto

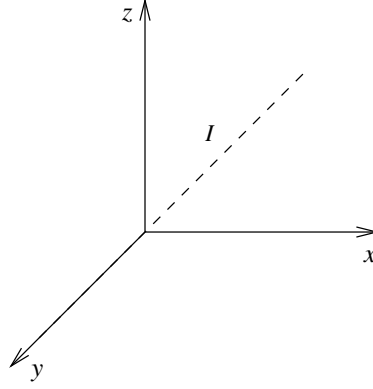


Figura 3.3: Cable infinito: fuente del modo TE

interno en $L^2(\Gamma)$, con la norma asociada por $|\cdot|_{0,\Gamma} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}^{\frac{1}{2}}$.

Para una función escalar $\varphi(x, z)$ definimos

$$\text{curl } \varphi = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (3.19)$$

y para un vector $\mathbf{w} = (w_x, w_z)$ en el plano xz definimos el escalar

$$\text{curl } \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}. \quad (3.20)$$

Sea también

$$H(\text{curl}, \Omega) = \left\{ \boldsymbol{\rho} \in (L^2(\Omega))^2 : \text{curl } \boldsymbol{\rho} \in (L^2(\Omega))^2 \right\}, \quad (3.21)$$

un espacio de Hilbert con producto interno y norma

$$(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\psi})_{H(\text{curl}, \Omega)} = (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\psi}) + (\nabla \times \boldsymbol{\rho}, \nabla \times \boldsymbol{\psi}) \quad \|\boldsymbol{\rho}\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = (\|\boldsymbol{\rho}\|_0^2 + \|\text{curl } \boldsymbol{\rho}\|_0^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.22)$$

En adelante usaremos la siguiente notación para los campos: en modo TM

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}, \quad (3.23a)$$

$$H_y = v, \quad (3.23b)$$

mientras que en modo TE

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}, \quad (3.24a)$$

$$E_y = u. \quad (3.24b)$$

3.3.1. El modo TM

Estamos interesados en encontrar una aproximación discreta a la solución (\mathbf{U}, v) del problema:

$$\sigma \mathbf{U} - \text{curl } v = -\mathbf{g}, \quad \text{en } \Omega \quad (3.25a)$$

$$\text{curl } \mathbf{U} + i\omega\mu v = 0, \quad \text{en } \Omega \quad (3.25b)$$

$$(1 - i)\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau} + v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \equiv \Gamma, \quad (3.25c)$$

que es el correspondiente al modo TM de las ecuaciones de Maxwell armónicas para campos secundarios en un dominio bidimensional. El dominio Ω es una región rectangular del plano xz , $\boldsymbol{\tau}$ es el vector tangente al borde Γ tomado en sentido horario, $\mathbf{g} = (g, 0)$ y se asume que la conductividad está acotada superior- e inferiormente por números positivos. Si testeamos la Ec. (3.25a) usando $\boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega)$ como función de prueba e integramos por partes haciendo uso de la Ec.(3.25c) (Girault y Raviart, 1981) y testeamos la Ec.(3.25b) usando a $\varphi \in L^2(\Omega)$ como función de prueba obtenemos el siguiente *problema variacional mixto*:

Encontrar $(\mathbf{U}, v) \in H(\text{curl}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tales que

$$(\sigma \mathbf{U}, \boldsymbol{\psi}) - (v, \text{curl } \boldsymbol{\psi}) + \langle (1-i)a \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle = -(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}),$$

$$\boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega), \quad (3.26a)$$

$$(\text{curl } \mathbf{U}, \varphi) + (i\omega\mu v, \varphi) = 0, \quad \varphi \in L^2(\Omega), \quad (3.26b)$$

donde usamos $a = \left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$. Santos (1998) definió una familia de elementos finitos para encontrar la solución discreta a este problema; el desarrollo siguiente se basa en sus ideas. Definimos una partición del dominio Ω en un conjunto de rectángulos Ω_j de diámetros acotados por h , de modo tal que cubran a todo el dominio, y que la intersección entre dos subdominios diferentes sea vacía. Existen otras restricciones usuales para mallas de elementos finitos (Brenner y Scott, 1994) que la partición así definida cumple automáticamente. Llamamos además Γ_j al conjunto de cuatro segmentos que forman el borde del elemento Ω_j .

Definimos también los espacios

$$V^h = \left\{ \mathbf{U}^h \in H(\text{curl}, \Omega) : \mathbf{U}^h|_{\Omega_j} \in P_{0,1} \times P_{1,0} \right\}, \quad (3.27a)$$

$$W^h = \left\{ v^h \in L^2(\Omega) : v^h|_{\Omega_j} \in P_{0,0} \right\}. \quad (3.27b)$$

$P_{1,0}$ denota los polinomios de grado no mayor que 1 en x y no mayor que 0 en z . Sean también $V_j^h = V^h|_{\Omega_j}$ y $W_j^h = W^h|_{\Omega_j}$ las restricciones de los espacios V^h y W^h al subdominio Ω_j . Dado $\boldsymbol{\psi} \in (H^1(\Omega))^2$, definimos ahora los grados de libertad sobre Ω_j utilizando los cuatro momentos

$$M_{\Gamma_j^s}(\boldsymbol{\psi}) = \left\{ \langle \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}, f \rangle_{\Gamma_j^s}; f \in P_0(\Gamma_j^s), \quad s = L, R, B, T \right\}. \quad (3.28)$$

Los elementos de la base local se obtienen con esta definición en $[0, 1]^2$ -el llamado elemento de referencia- y luego mediante traslaciones y escaleos se da la base en cada Ω_j . La base de V^h se obtiene extendiendo cada base local, haciéndola nula fuera del dominio correspondiente. Para construir entonces la base de referencia, tomemos un elemento $r = (a + bz, c + dx)$ de $P_{0,1} \times P_{1,0}$ y le aplicamos los grados de libertad, obteniendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

$\psi^T =$	$(z, 0)$	$\psi^B =$	$(-1 + z, 0)$
$\psi^L =$	$(0, 1 - x)$	$\psi^R =$	$(0, -x)$

Tabla 3.1: Funciones base en $[0, 1]^2$ para V^h .

Resolver sucesivamente los cuatro sistemas lineales con lado izquierdo dado por la Ec. (3.29), y cuyos lados derechos son las columnas de la matriz $I_{4 \times 4}$, o de forma equivalente tomar las columnas de la matriz inversa de la matriz de coeficientes en la Ec. (3.29), nos da los coeficientes de los vectores de la base buscados, que se muestran en la Tabla 3.1.

Para el espacio W^h la elección de la función base es simple, ya que podemos tomar la función característica $\Theta(x, z)$ del cuadrado de referencia,

$$\Theta(x, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, z) \in [0, 1]^2, \\ 0 & \text{en todo otro caso.} \end{cases} \quad (3.30)$$

El elemento finito mixto que queda así definido es unisolvante y conforme en $H(\text{curl}, \Omega)$, donde esta última característica implica que las funciones de V^h tienen componentes tangenciales continuas en los bordes internos Γ_j (Nédélec, 1980). Si bien estos elementos no son tan usuales como los presentados, por ejemplo, en Lee y Masden (1990) donde los grados de libertad quedan fijados por evaluación de los polinomios en los vértices del subdominio, tienen la ventaja de poder tratar discontinuidades de las propiedades del medio de forma transparente (Monk, 1992, 1993).

La aproximación de elementos finitos mixtos de las Ecs. (3.25) está dada por la restricción del sistema (3.26) a los espacios $V^h \times W^h$:

Encontrar $(\mathbf{U}^h, v^h) \in V^h \times W^h$ tales que

$$(\sigma \mathbf{U}^h, \boldsymbol{\psi}) - (v^h, \text{curl } \boldsymbol{\psi}) + \langle (1 - i)a \mathbf{U}^h \cdot \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle = -(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}), \quad \boldsymbol{\psi} \in V^h, \quad (3.31a)$$

$$(\text{curl } \mathbf{U}^h, \varphi) + (i\omega\mu v^h, \varphi) = 0, \quad \varphi \in W^h. \quad (3.31b)$$

Esta variante, llamada *global*, conduce a un sistema de ecuaciones lineales de solución única con $3n_x n_z + n_x + n_z$ incógnitas, si n_x (n_z) es el número de subdominios en dirección x (z) respectivamente.

Estamos interesados en un método que sea apto para procesamiento paralelo y que nos permita evitar la resolución de sistemas lineales con un número generalmente elevado de incógnitas; para ello se hace necesaria la introducción de algunos nuevos conceptos.

Descomposición de dominio (DD): La idea general es dividir el dominio en el cual se quiere resolver una ecuación diferencial en varios subdominios, lo que conduce a algoritmos naturalmente paralelizables. Si bien los métodos DD surgieron para resolver

problemas elípticos, han sido utilizados con asiduidad para resolver también otros tipos de ecuaciones diferenciales parciales (Keyes et al., 1992; Keyes y Xu, 1994), entre ellas las ecuaciones de Maxwell armónicas (Després et al., 1992). Existen dos tipos de métodos DD, con y sin superposición de dominios. En general los primeros son más simples en el sentido de su implementación, pero son sensibles a discontinuidades en los coeficientes del problema, y duplican los cálculos en las áreas superpuestas, lo que es particularmente costoso en el caso de problemas tridimensionales con gran número de subdominios. Los segundos, por su parte, resuelven las desventajas del caso anterior, pero pueden ser computacionalmente caros.

Hibridización: Para obtener un método de elementos finitos híbrido, se remueve la condición de continuidad de las componentes tangenciales de los elementos de V^h sobre las fronteras interdominios, y se las acopla indirectamente mediante vínculos válidos sobre dichas interfases, cuyo cumplimiento se fuerza a través de la introducción de multiplicadores de Lagrange. Como resultado de esta formulación, pueden hacerse aproximaciones de la solución en el interior de un elemento Ω_j independientes de las aproximaciones sobre sus bordes (Carey y Oden, 1983). El planteo híbrido tiene asociado un problema algebraico más simple que, en nuestro caso, al correspondiente a las Ecs. (3.31) (Arnold y Brezzi, 1985), pero se paga el costo de introducir nuevas variables.

En el caso que estamos tratando la descomposición del dominio Ω coincide con la partición asociada con los espacios V^h y W^h , es decir elegimos una descomposición donde los dominios no se superponen. Nuestro objetivo es resolver localmente, en cada Ω_j , las ecuaciones (3.25), es decir

$$\sigma \mathbf{U}_j - \text{curl } v_j = -\mathbf{g}_j, \quad \text{en } \Omega_j \quad (3.32a)$$

$$\text{curl } \mathbf{U}_j + i\omega\mu v_j = 0, \quad \text{en } \Omega_j \quad (3.32b)$$

$$(1-i)\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \mathbf{U}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j + v_j = 0 \quad \text{sobre } B_j^a, \quad (3.32c)$$

donde utilizamos $B_j^a = \Gamma \cap \Gamma_j$. Claro que en los bordes internos deben imponerse condiciones de consistencia, tanto para \mathbf{U}_j como para v_j . Las condiciones utilizadas son la continuidad de la componente tangencial de \mathbf{U}_j y la continuidad de v_j a través de todas las fronteras Γ_j , tales que $\Gamma_j \cap \Gamma = \emptyset$, es decir en todos los segmentos, que formando parte del borde de los dominios Ω_j no son también parte del borde externo. Ambas condiciones pueden ser expresadas equivalentemente mediante las condiciones de borde de Robin (Douglas et al., 1993b; Kim, 1995)

$$v_j + \beta_{jk} \mathbf{U}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j = -\beta_{jk} \mathbf{U}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k + v_k \quad \text{sobre } \Gamma_{jk}, \quad \Gamma_{jk} \subset \Gamma_j, \quad (3.33a)$$

$$v_k + \beta_{jk} \mathbf{U}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k = -\beta_{jk} \mathbf{U}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j + v_j \quad \text{sobre } \Gamma_{kj}, \quad \Gamma_{kj} \subset \Gamma_k, \quad (3.33b)$$

donde β_{jk} es un parámetro de relajación complejo con parte real positiva y parte imagi-

naría negativa, que se introduce para acelerar la convergencia. Aquí denotamos por Ω_k a los vecinos del dominio Ω_j , y denominamos Γ_{jk} al segmento compartido por los dominios adyacentes Ω_j y Ω_k . Debe tenerse cuidado al considerar los bordes, puesto que $|\Gamma_{jk}| = |\Gamma_{kj}|$, pero la dirección del vector tangente cambia a cada lado de los mismos. La forma variacional del problema con descomposición de dominio se obtiene de las Ecs. (3.32) en forma análoga al caso global, observando en este caso que en la integración por partes deben ser tenidas en cuenta también las interfases internas. Su formulación es la siguiente: En todo Ω_j encontrar (\mathbf{U}_j, v_j) tal que

$$(\sigma \mathbf{U}_j, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (v_j, \text{curl } \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - \sum_{\substack{k \\ \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi}} \langle v_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_{jk}} + \langle (1-i)a \mathbf{U}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{B_j^a} = -(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j}, \quad \boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega_j), \quad (3.34a)$$

$$(\text{curl } \mathbf{U}_j, \varphi)_{\Omega_j} + (i\omega\mu v_j, \varphi)_{\Omega_j} = 0, \quad \varphi \in L^2(\Omega_j). \quad (3.34b)$$

Reemplazamos ahora v_j en el tercer término del lado izquierdo de la Ec. (3.34a) por la expresión que se obtiene despejándolo de Ec. (3.33a), y luego pasamos al lado derecho de (3.34a) todos los términos que involucran a dominios vecinos del Ω_j , ya que, como mencionamos anteriormente, el objetivo de la técnica de descomposición de dominio es localizar los cálculos correspondientes a cada subdominio. Es natural en esta instancia sugerir la construcción de la solución del problema planteado de esta manera en forma iterativa, asumiendo que los vecinos a Ω_j -el lado derecho del sistema de ecuaciones- yacen un nivel atrasados. De esta manera el problema queda planteado como sigue: eligiendo arbitrariamente (\mathbf{U}_j^0, v_j^0) , se computan $(\mathbf{U}_j^{n+1}, v_j^{n+1})$ mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} & (\sigma \mathbf{U}_j^{n+1}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (v_j^{n+1}, \text{curl } \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\ & + \sum_{\substack{k \\ \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi}} \langle \beta_{jk} \mathbf{U}_j^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_{jk}} \\ & + \langle (1-i)a \mathbf{U}_j^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{B_j^a} = \\ & -(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - \sum_{\substack{k \\ \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi}} \langle \beta_{jk} \mathbf{U}_k^n \cdot \boldsymbol{\tau}_k - v_k^n, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_{jk}}, \\ & \boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega_j), \end{aligned} \quad (3.35a)$$

$$(\text{curl } \mathbf{U}_j^{n+1}, \varphi)_{\Omega_j} + (i\omega\mu v_j^{n+1}, \varphi)_{\Omega_j} = 0, \quad \varphi \in L^2(\Omega_j), \quad (3.35b)$$

Antes de dar la versión discreta del sistema de ecuaciones (3.35) es preciso tener en cuenta que como las funciones del espacio W^h pueden ser discontinuas en los bordes Γ_{jk} , imponer las condiciones de consistencia (3.33) implicaría que la condición de continuidad de la componente tangencial de \mathbf{U} se violaría a menos que la aproximación discreta v^h sea una constante, caso que obviamente no nos interesa. Hibridizamos entonces nuestro problema (Douglas et al., 1993a; Beckie et al., 1993; Mosé et al., 1994), para lo cual desacoplamos el valor de v^h en el interior de cada dominio del que toma en sus bordes, e incorporamos un conjunto de multiplicadores de Lagrange asociados al valor de v_j^h sobre

los bordes.

$$\Lambda^h = \left\{ \lambda^h : \lambda^h|_{\Gamma_{jk}} \in P_0(\Gamma_{jk}), \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi \right\}. \quad (3.36)$$

Se debe notar aquí que sobre el borde Γ_{jk} existen dos multiplicadores, asociados a v_j^h y a v_k^h respectivamente, que tienden al mismo valor cuando el método converge; las versiones discretas de las condiciones de consistencia (3.33), que establecen los vínculos entre los multiplicadores, se obtienen haciendo los reemplazos pertinentes.

Podemos entonces establecer el algoritmo de elementos finitos mixtos híbrido con descomposición de dominio como sigue: Eligiendo $(\mathbf{U}_j^{h,0}, v_j^{h,0}, \lambda_{jk}^{h,0}, \lambda_{kj}^{h,0}) \in V_j^h \times W_j^h \times \Lambda_{jk}^h \times \Lambda_{kj}^h$ arbitrariamente, se computan $(\mathbf{U}_j^{h,n+1}, v_j^{h,n+1}, \lambda_{jk}^{h,n+1}) \in V_j^h \times W_j^h \times \Lambda_{jk}^h$ como la solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} & (\sigma \mathbf{U}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (v_j^{h,n+1}, \text{curl } \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\ & + \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi}} \langle \beta_{jk} \mathbf{U}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma_{jk}} \\ & + \langle (1-i)a \mathbf{U}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{B_j^a} = \\ & - (\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi}} \langle \beta_{jk} \mathbf{U}_k^{h,n} \cdot \boldsymbol{\tau}_k - \mathbf{v}_k^{h,n}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma_{jk}}, \\ & \boldsymbol{\psi} \in V_j^h, \end{aligned} \quad (3.37a)$$

$$(\text{curl } \mathbf{U}_j^{h,n+1}, \varphi)_{\Omega_j} + (i\omega\mu v_j^{h,n+1}, \varphi)_{\Omega_j} = 0, \quad \varphi \in W_j^h, \quad (3.37b)$$

$$\lambda_{jk}^{h,n+1} = \lambda_{kj}^{h,n} - \beta_{jk}(\mathbf{U}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + \mathbf{U}_k^{h,n} \cdot \boldsymbol{\tau}_k) \quad \text{sobre } \Gamma_{jk}, \quad \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi. \quad (3.37c)$$

Santos (1998) probó que el método iterativo (3.37) converge a la solución del problema discreto global, y encontró una cota para el error de este último, de orden h para el caso de polinomios de primer orden para aproximar \mathbf{U} y funciones constantes a trozos para aproximar v que aquí describimos.

Debe notarse que, dada la elección de los espacios V^h y W^h dados en la Ec. (3.27), el sistema de ecuaciones (3.37) se transforma en un sistema algebraico de cinco ecuaciones en cada uno de los elementos de la partición del dominio Ω .

3.3.2. El modo TE

En este caso el problema que queremos aproximar es

$$\text{curl } u + i\omega\mu \mathbf{V} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.38a)$$

$$\text{curl } \mathbf{V} = \sigma u + f \quad \text{en } \Omega, \quad (3.38b)$$

$$(1-i)au - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (3.38c)$$

Si multiplicamos (3.38a) por $\boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega)$ e integramos por partes, y si testeamos (3.38b) contra $\varphi \in L^2(\Omega)$, el problema variacional mixto queda planteado de la siguiente manera: Encontrar $(\mathbf{V}, u) \in H(\text{curl}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tales que

$$(i\omega\mu\mathbf{V}, \boldsymbol{\psi}) + (u, \text{curl } \boldsymbol{\psi}) + \langle (\frac{1+i}{a})\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle = 0, \quad \boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega), \quad (3.39a)$$

$$(\text{curl } \mathbf{V}, \varphi) - (\sigma u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in L^2(\Omega). \quad (3.39b)$$

A partir de este estadio se siguen, con pequeñas variaciones, los pasos descriptos en la sección anterior. Cuando aplicamos la descomposición de dominio las condiciones de consistencia en las fronteras internas son la continuidad de u y la de la componente tangencial de \mathbf{V} , de modo tal que las condiciones de Robin son en este caso

$$u_j - \beta_{jk}\mathbf{V}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j = u_k - \beta_{jk}\mathbf{V}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \quad \Gamma_{jk} \subset \Gamma_j, \quad (3.40a)$$

$$u_k - \beta_{jk}\mathbf{V}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k = u_j - \beta_{jk}\mathbf{V}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j \quad \Gamma_{kj} \subset \Gamma_k. \quad (3.40b)$$

Asociando en este caso multiplicadores de Lagrange $\lambda_{jk}^h \simeq u_j^h$ en la interfases internas Γ_{jk} , el método mixto de elementos finitos híbrido con descomposición de dominio es el siguiente: Se eligen $(\mathbf{V}_j^{h,0}, u_j^{h,0}, \lambda_{jk}^{h,0}) \in V_j^h \times W_j^h \times \Lambda_{jk}^h \times \Lambda_{kj}^h$ arbitrariamente. Luego, se obtienen $(\mathbf{V}_j^{h,n+1}, u_j^{h,n+1}, \lambda_{jk}^{h,n+1}) \in V_j^h \times W_j^h \times \Lambda_{jk}^h$ como la solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} (i\omega\mu\mathbf{V}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} + (u_j^{h,n+1}, \text{curl } \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\ + \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi}} \langle \lambda_{jk}^{h,n+1}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_{jk}} \\ + \langle (\frac{1+i}{a})\mathbf{V}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{B_j^a} = 0, \\ \boldsymbol{\psi} \in V_j^h \end{aligned} \quad (3.41a)$$

$$\begin{aligned} (\text{curl } \mathbf{V}_j^{h,n+1}, \varphi)_{\Omega_j} - (\sigma u_j^{h,n+1}, \varphi)_{\Omega_j} = (f, \varphi)_{\Omega_j}, \\ \varphi \in W_j^h, \end{aligned} \quad (3.41b)$$

$$\lambda_{jk}^{h,n+1} = \lambda_{kj}^{h,n} + \beta_{jk}(\mathbf{V}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + \mathbf{V}_k^{h,n} \cdot \boldsymbol{\tau}_k), \text{ sobre } \Gamma_{jk}, \Gamma_{jk} \cap \partial\Omega = \phi. \quad (3.41c)$$

Análogamente al modo TM, el sistema (3.41) se transforma en un sistema algebraico de cinco ecuaciones, en cada uno de los elementos de la partición del dominio Ω .

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

En este capítulo analizaremos los distintos resultados obtenidos para los campos electromagnéticos primarios y secundarios, para diversas conductividades y en distintas frecuencias.

4.1. Campos primarios en modo TM y TE

En primer lugar, se buscó observar el comportamiento de los campos primarios en dominios homogéneos con tres conductividades arbitrarias: 10^{-1} , 10^{-2} y 10^{-3} S/m y en tres frecuencias dadas, 10^{-1} , 1 y 10 Hz. Los dominios en los que se trabajó en cada caso estaban ligados a la longitud de penetración δ , parámetro que representa el alcance de los campos electromagnéticos en función de la conductividad y la frecuencia. Su expresión está dada por

$$\delta = \left(\frac{2}{i\omega\mu\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

que puede aproximarse, de acuerdo al valor de μ empleado como

$$\delta = 503\left(\frac{1}{f\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

De esta manera, el dominio en el cual se trabajó en cada caso fue determinado a partir de

$$hn_x \sim 2\delta. \quad (4.3)$$

De acuerdo a los valores de f y σ establecidos, se calcularon las longitudes de penetración que se muestran en la Tabla 4.1 y en virtud de los valores obtenidos, se calcularon las dimensiones para cada dominio cuadrado de trabajo, que constan en la Tabla 4.2.

Las curvas para los campos en modo TE y TM se muestran en las figuras 4.1-4.6. En ambos modos se empleó como fuente una corriente de 1 A. Se puede notar que la magnitud de los campos aumenta con la frecuencia y disminuye con la conductividad, así

Conductividad	$f = 10^{-1}\text{Hz}$	$f = 1\text{Hz}$	$f = 10\text{Hz}$
$\sigma = 10^{-1}\text{S/m}$	5030	1590.6	503
$\sigma = 10^{-2}\text{S/m}$	15906	5030	1590.6
$\sigma = 10^{-3}\text{S/m}$	50300	15906	5030

Tabla 4.1: Longitud de penetración en función de las frecuencias y conductividades.

Conductividad	$f = 10^{-1}\text{Hz}$	$f = 1\text{Hz}$	$f = 10\text{Hz}$
$\sigma = 10^{-1}\text{S/m}$	10000	3200	1000
$\sigma = 10^{-2}\text{S/m}$	32000	10000	3200
$\sigma = 10^{-3}\text{S/m}$	100000	32000	10000

Tabla 4.2: Longitud del dominio en función de la longitud de penetración.

como también se puede ver que a mayor frecuencia y conductividad disminuye la longitud de penetración de los campos. Los campos primarios vinculados a las componentes E_x y H_y en modo TM y H_x y H_z en modo TE decaen muy rápidamente, por lo que las componentes más sensibles a los cambios de conductividad son E_z en modo TM y E_y en modo TE.

4.2. Campos secundarios en modo TM y TE

Para el cálculo de los campos secundarios, el primer paso fue la delimitación del dominio de trabajo. Este paso previo al cálculo fue de suma importancia debido a la influencia de los bordes computacionales en los valores de los campos. La elección del tamaño del dominio en el cual se calcularon los campos se hizo en base al error relativo en el campo total comparando varias geometrías, buscando optimizar los tiempos de cómputo y la resolución espacial de los campos. Las pruebas se hicieron en el modo TM para una frecuencia de 10^{-1} Hz, puesto que para dicha frecuencia, los campos tienen la mayor longitud de penetración, por lo que van a ser más sensibles a los efectos de borde computacional que para frecuencias mayores. La idea era ver con qué geometría los campos se veían menos afectados por los bordes computacionales. La distribución de conductividades consistió en un modelo sencillo caracterizado por una conductividad primaria de 10^{-3} S/m y una conductividad secundaria de 10^{-5} S/m, correspondientes a una anomalía de conductividad de tipo resistivo (fig. 4.8). Se calcularon los campos totales y los errores relativos entre geometrías desde los 1000 m de lado hasta 4000 m, para valores de h de 1, 2.5 y 5 m, buscando que los mismos no superen el 2 %. Este valor se alcanzó satisfactoriamente comparando geometrías de 1000 y 2000 m de lado, para los tres valores de h . En virtud de dichos resultados, se procedió al cálculo de los campos en un dominio de 1500×1500 m, con un h de 2.5 m. En este escenario, se calcularon las

tres componentes del campo electromagnético para ambos modos, para las frecuencias 10^{-1} , 1, 10, 100 y 1000 Hz, en dos distribuciones de conductividad, caracterizadas por un medio homogéneo con un valor de conductividad de 10^{-3} S/m (conductividad primaria), perturbado por una anomalía (conductividad secundaria). Un modelo corresponde a una anomalía conductiva de 10^{-1} S/m (fig. 4.7) y el otro es un modelo resistivo con una conductividad de 10^{-5} S/m, que es el que se empleó para decidir la geometría a utilizar (fig. 4.8).

4.2.1. Modo TM

Los gráficos correspondientes a los campos secundarios en modo TM nos muestran la ubicación y la forma de la anomalía, para ambas distribuciones de conductividad, para las frecuencias 10^{-1} y 1000 Hz (figuras 4.9-4.12). La componente E_x nos permite visualizar los bordes verticales de la anomalía y lo mismo se ve, en menor medida en la componente H_y . La componente que evidencia mayores cambios es E_z donde se ve muy nítidamente la presencia de la anomalía. Además, se muestra para todas las frecuencias, un corte de la componente E_x para una profundidad de 801.25 m, cercano a la fuente, en la que se observan curvas coherentes con el comportamiento de la misma, así como también cómo se invierten las curvas si comparamos el caso conductivo con el resistivo (4.13). Los máximos y mínimos absolutos de las curvas de E_x y H_y , así como los máximos y mínimos localizados en el centro de los cortes de E_z sirven como referencia de los límites verticales de la anomalía.

4.2.2. Modo TE

Los gráficos correspondientes a los campos secundarios en modo TE también nos muestran la anomalía con un detalle considerable, para las frecuencias 10^{-1} y 1000 Hz (figs. 4.14-4.17). Para el caso resistivo, la componente H_x refleja el tope y la base de la anomalía, mientras que en el caso conductivo sólo se aprecia el tope. En cuanto a H_z , esta componente muestra bien los bordes verticales de ambas anomalías. Finalmente, la componente E_y detalla muy bien la anomalía en su totalidad. Se observa además una mejor resolución para la frecuencia más alta. Además, se muestra un corte de la componente H_z a 901.25 m de profundidad, que pasa por la mitad de la anomalía, para las frecuencias 10, 100 y 1000 Hz (fig. 4.18). Análogamente al modo TM, las curvas son coherentes con la fuente y se observan las inversiones en las curvas al comparar los dos tipos de anomalías representados.

4.3. Análisis de un reservorio petrolífero off-shore

Para completar el trabajo, se decidió incluir una adaptación de un modelo más realista, que representa un reservorio petrolífero *off-shore*, extraído de Zhdanov (2009) (figura

4.19). La región de estudio es una región marina de 16 km de largo por 4 km de profundidad, donde la profundidad del lecho marino está ubicada a 300 m, considerando para el agua una conductividad de 4 S/m; por debajo, los sedimentos subyacentes, con una conductividad de 4 S/m y una anomalía resistiva de 0.02 S/m, de 5 km de largo por 1.5 km de profundidad, ubicada a 700 m de profundidad, y extendida lateralmente a 7 km del borde izquierdo del dominio. Se trabajó con una frecuencia de 0.25 Hz. Dadas las dimensiones de la anomalía, fue necesario mover la posición de la fuente para su correcta caracterización. Se comenzó poniendo la fuente a 250 m de profundidad y centrada horizontalmente, y a partir de esa posición, se movió lateralmente con paso 500 m hasta quedar a 4000 m del borde lateral derecho. De esta manera, se logró identificar la ubicación y dimensiones de la anomalía, a pesar de la presencia de ruido provocado por la fuente (figs. 4.20 y 4.21).

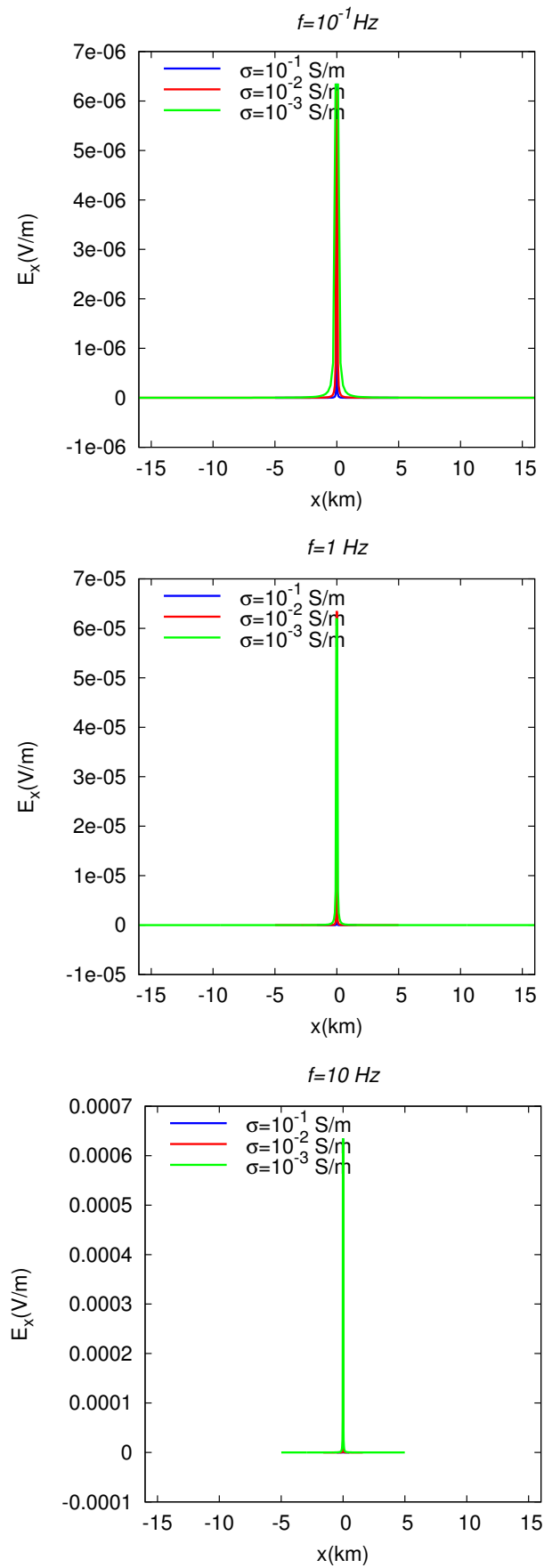


Figura 4.1: Componente E_x del modo TM para frecuencias de 10^{-1} , 1 y 10 Hz.

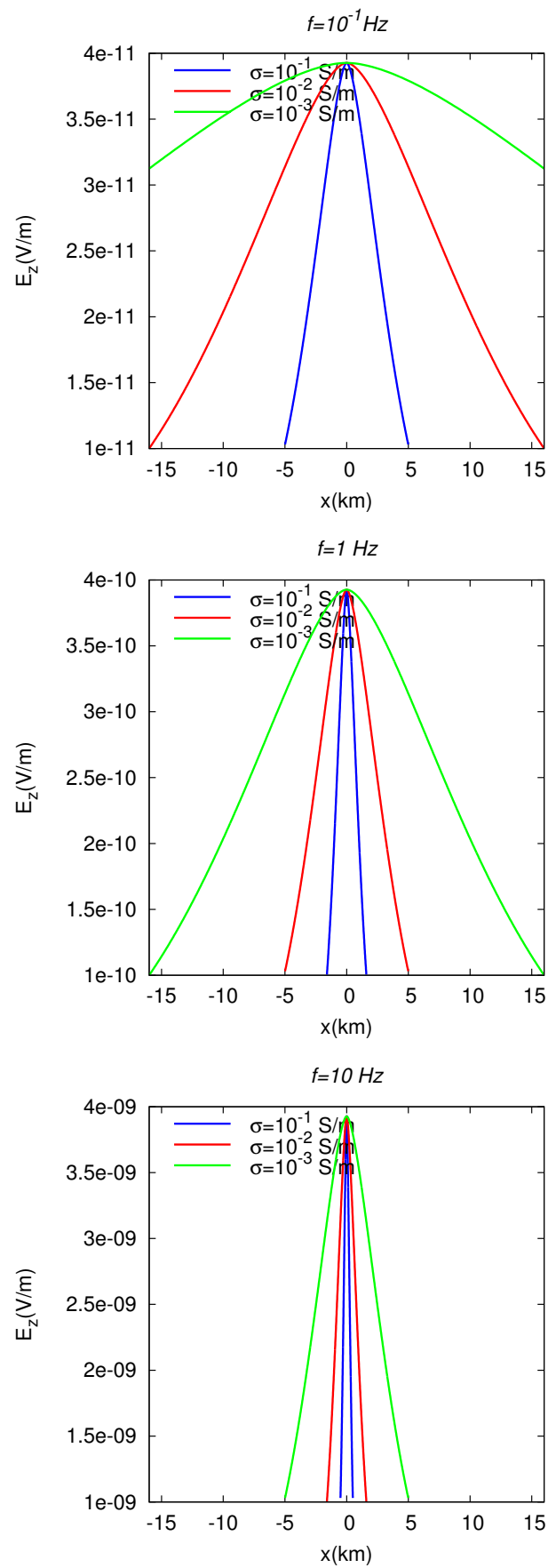


Figura 4.2: Componente E_z del modo TM para frecuencias de 10^{-1} , 1 y 10 Hz.

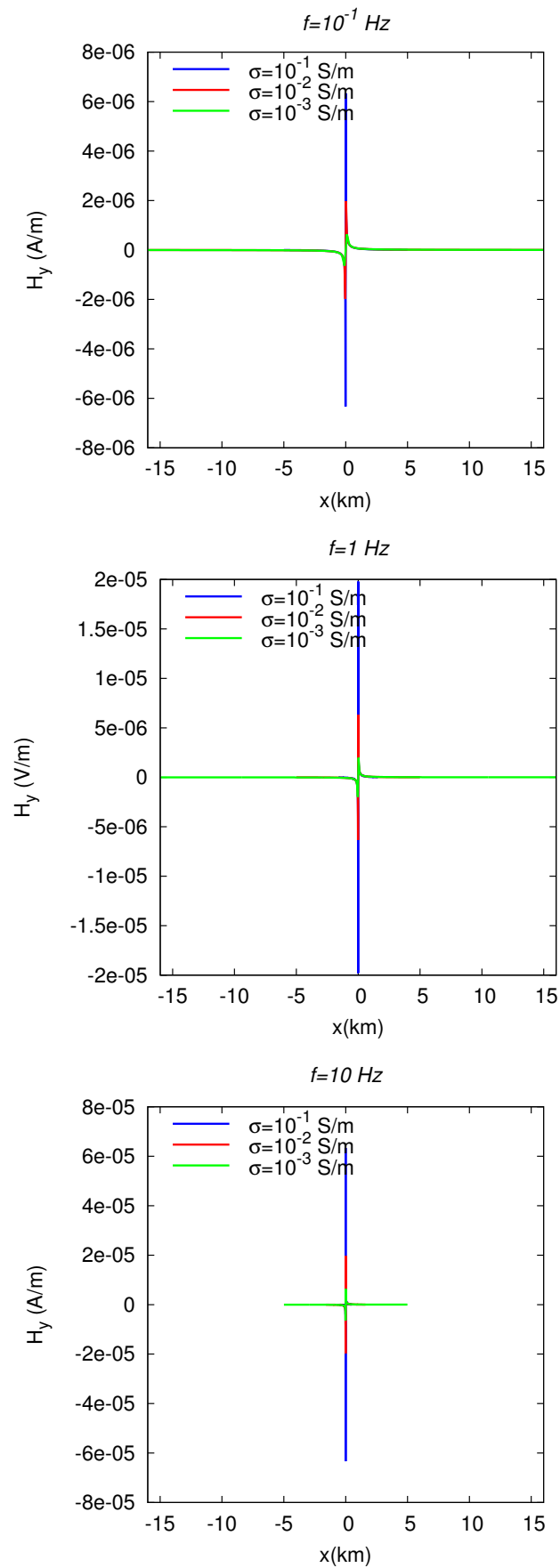


Figura 4.3: Componente H_y del modo TM para frecuencias de 10^{-1} , 1 y 10 Hz.

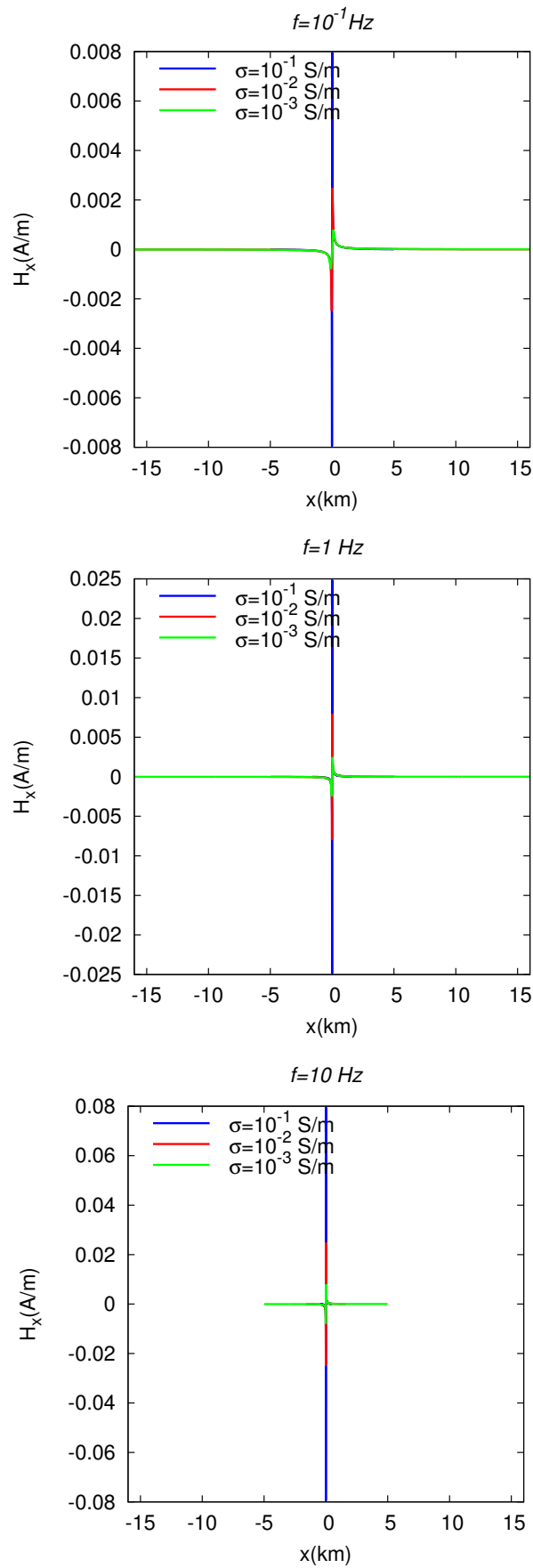


Figura 4.4: Componente H_x del modo TM para frecuencias de 10^{-1} , 1 y 10 Hz.

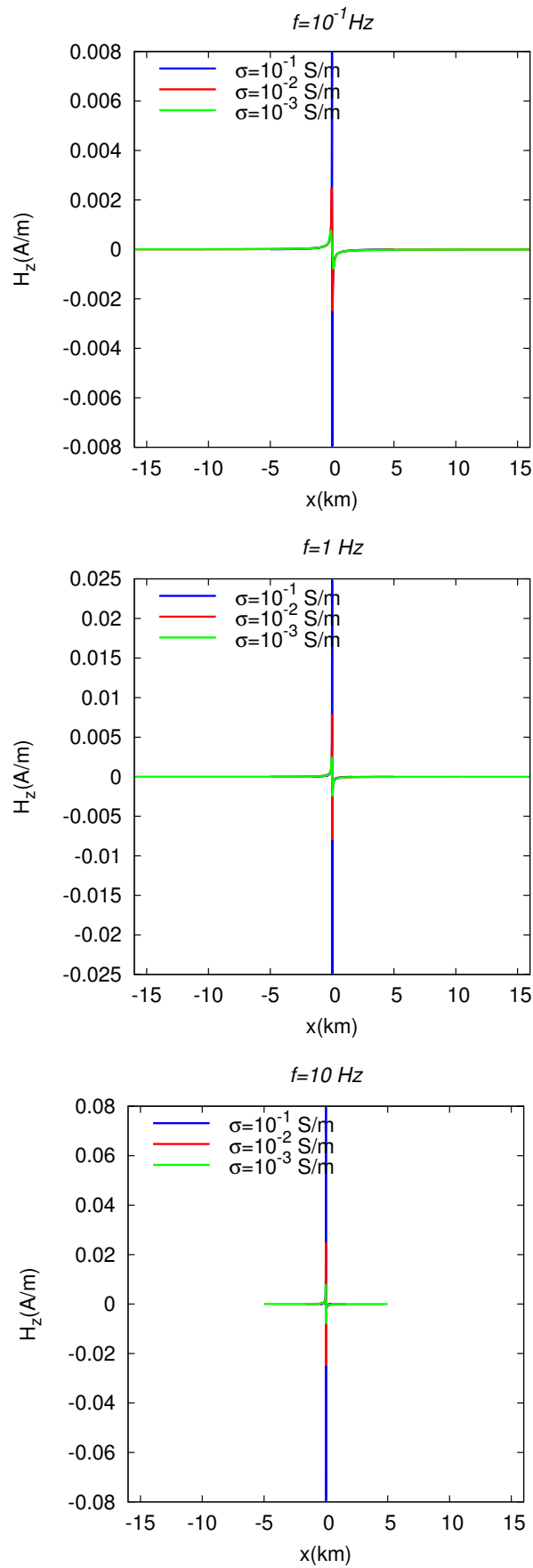


Figura 4.5: Componente H_z del modo TM para frecuencias de 10^{-1} , 1 y 10 Hz.

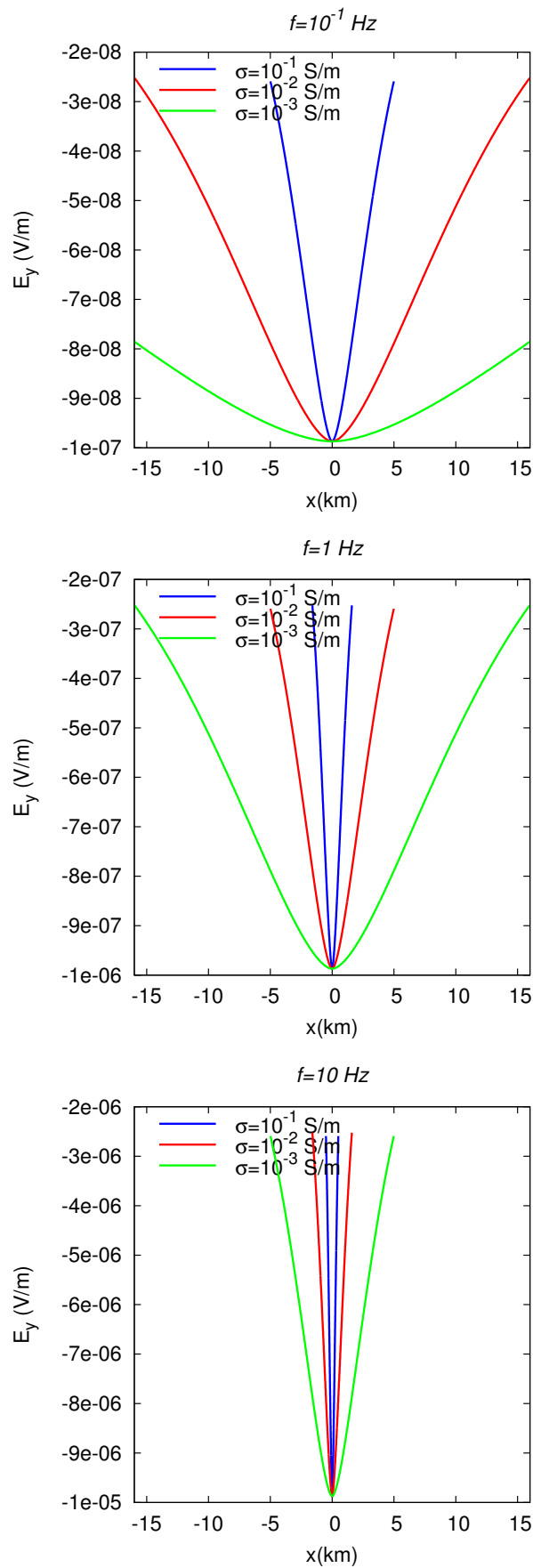


Figura 4.6: Componente E_y del modo TM para frecuencias de 10^{-1} , 1 y 10 Hz.

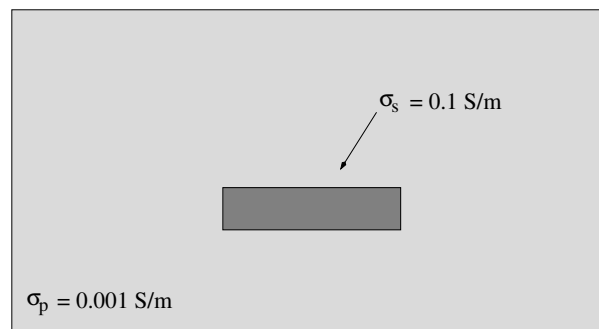


Figura 4.7: Distribución de conductividades para una anomalía conductiva

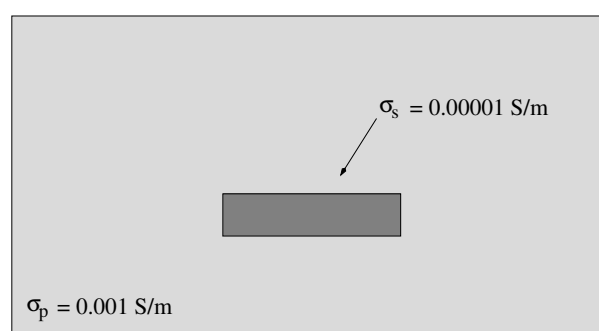


Figura 4.8: Distribución de conductividades para una anomalía resistiva

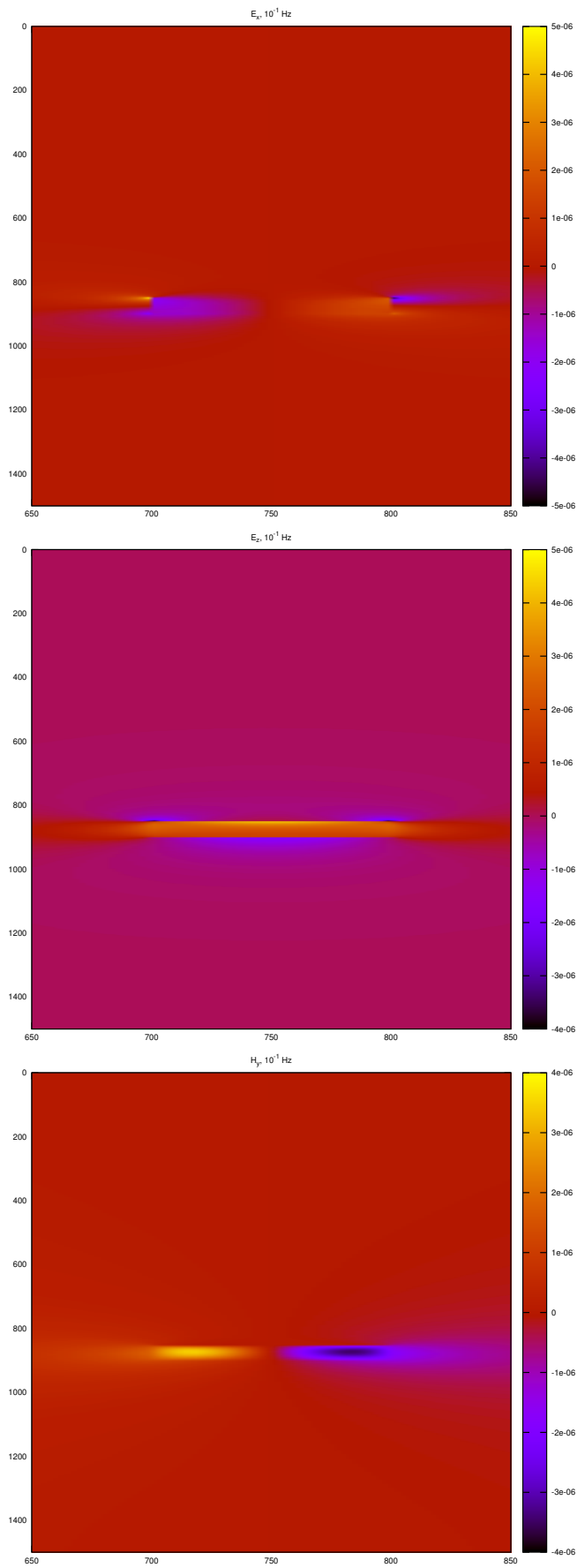


Figura 4.9: Campos EM a una frecuencia de 10^{-1} Hz para una anomalía conductiva en modo TM.

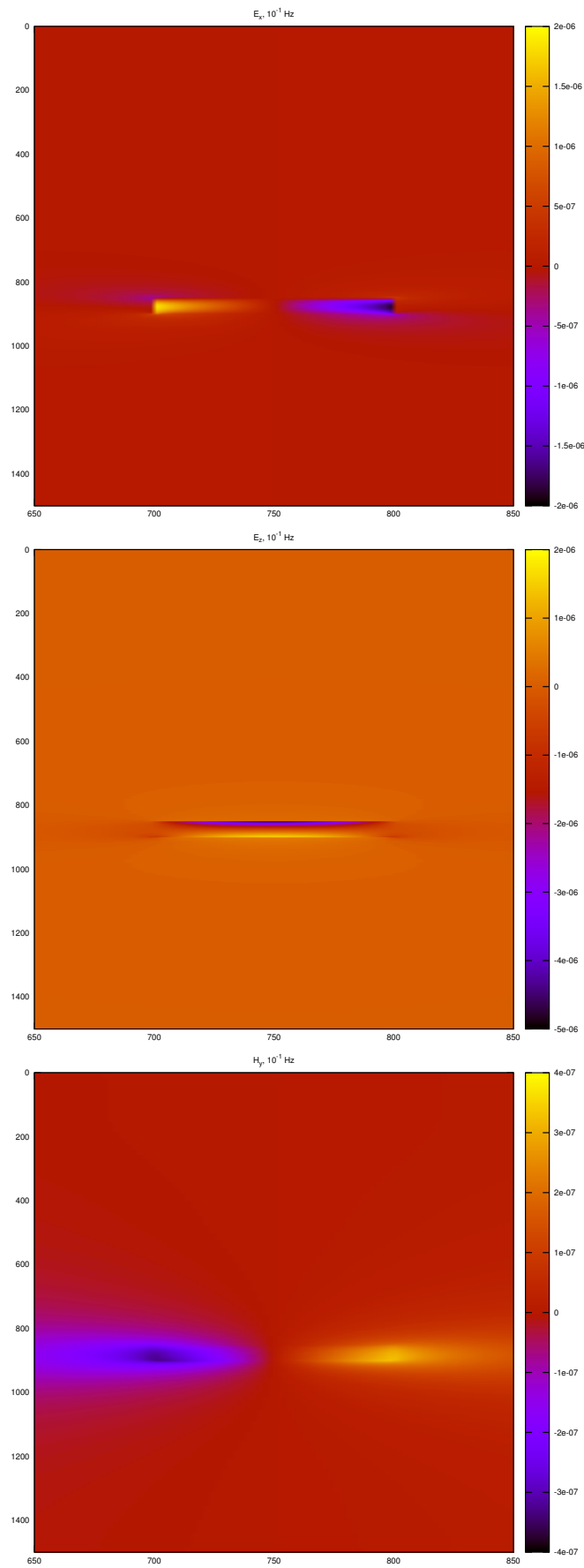


Figura 4.10: Campos EM a una frecuencia de 10^{-1} Hz para una anomalía resistiva en modo TM.

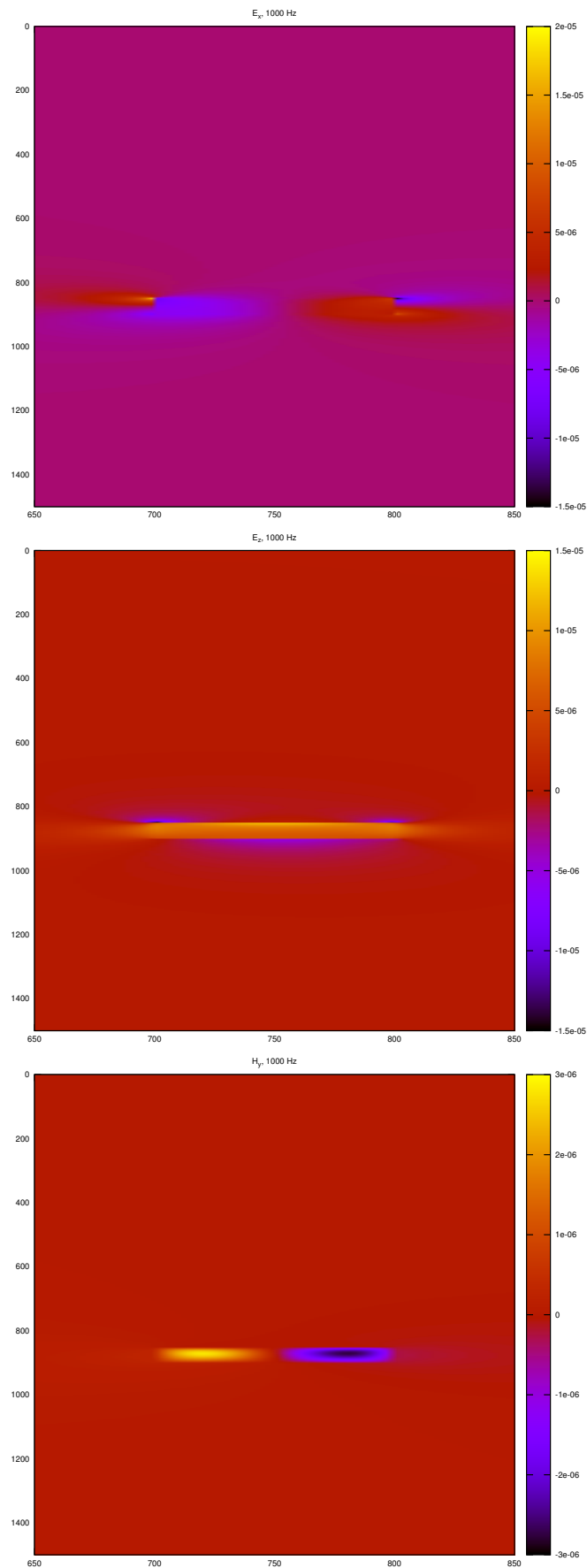


Figura 4.11: Campos EM a una frecuencia de 1000 Hz para una anomalía conductiva en modo TM.

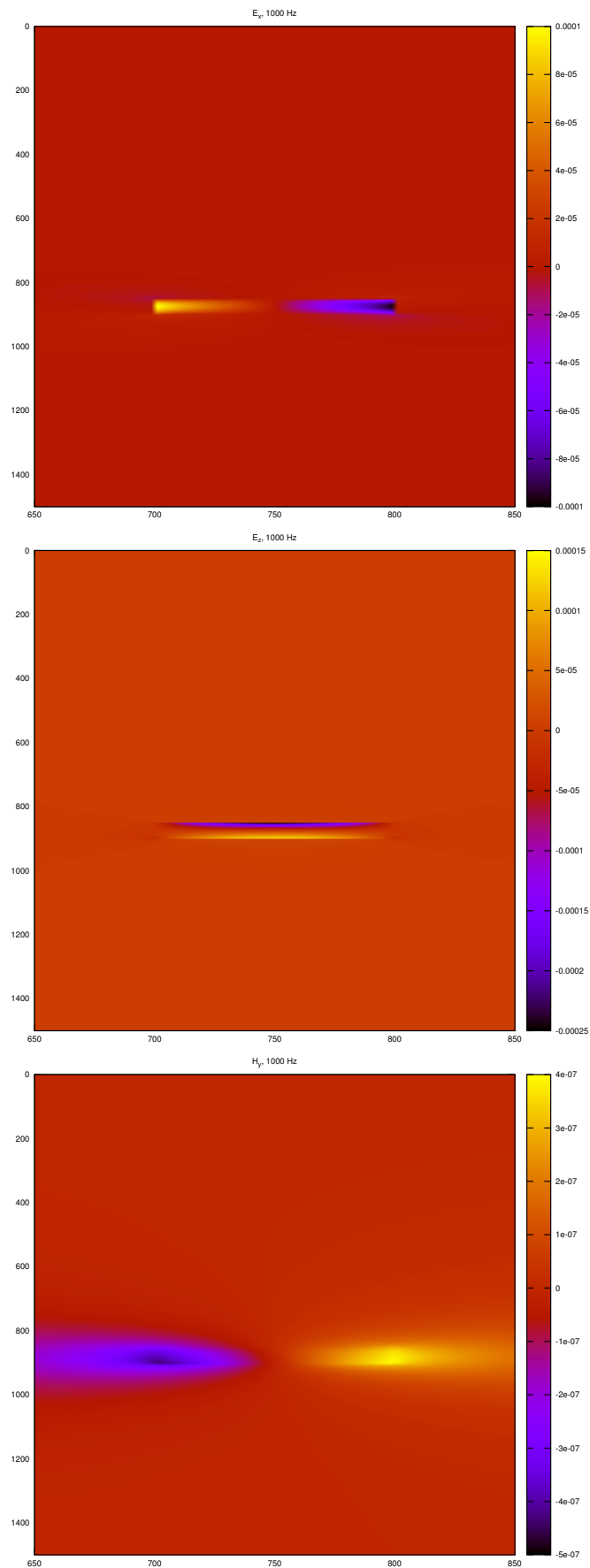


Figura 4.12: Campos EM a una frecuencia de 1000 Hz para una anomalía resistiva en modo TM.

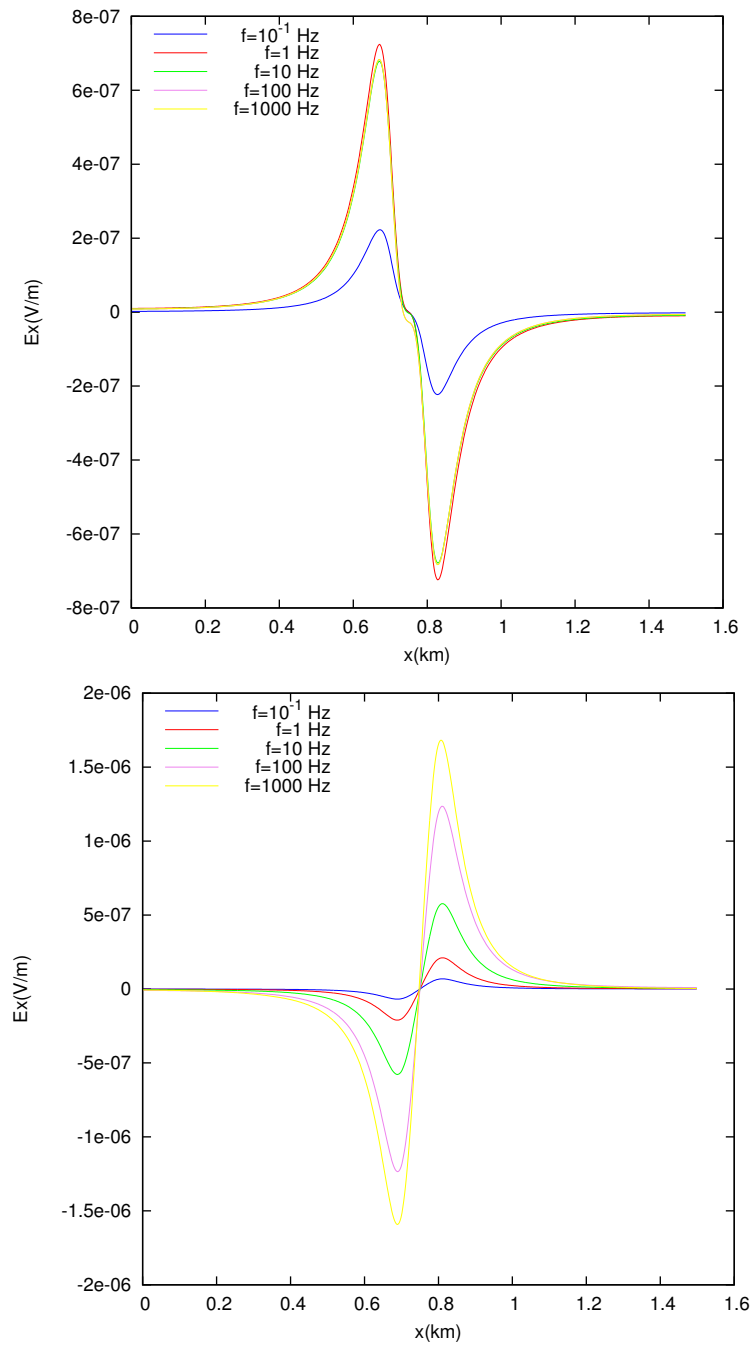


Figura 4.13: Componente E_x del modo TM a una profundidad de 801.25 m.

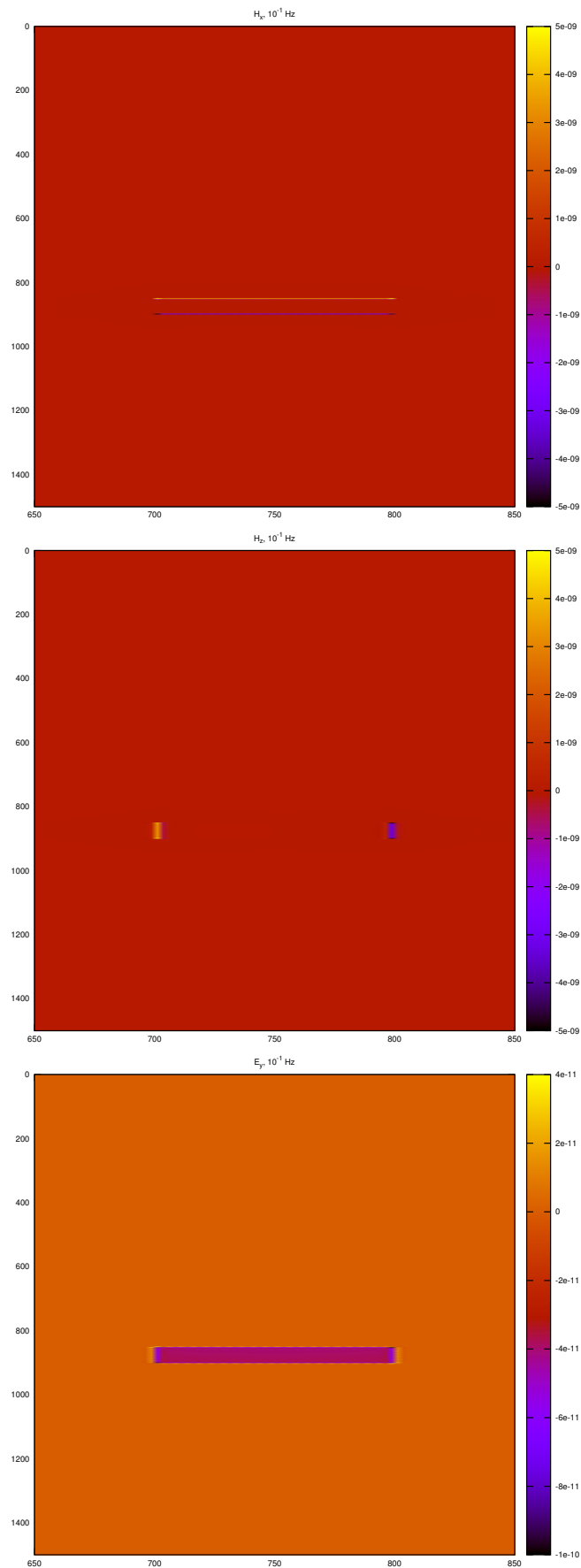


Figura 4.14: Campos EM a una frecuencia de 10^{-1} Hz para una anomalía conductiva en modo TE.

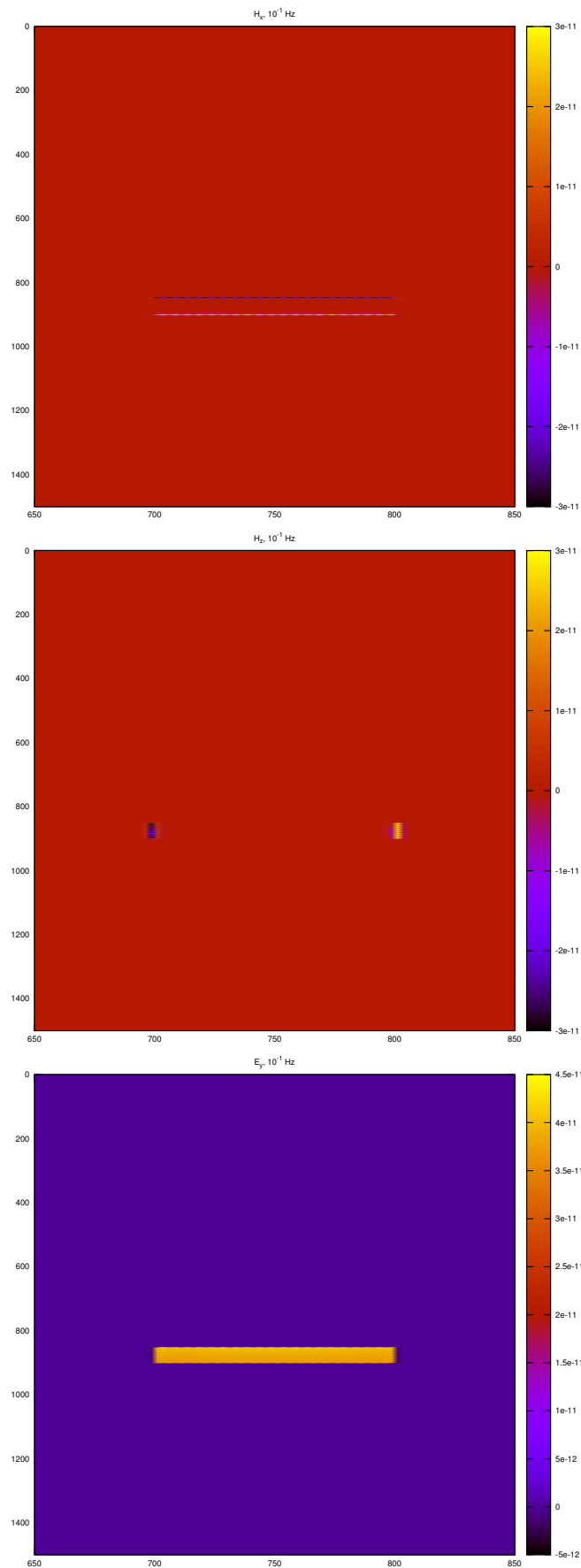


Figura 4.15: Campos EM a una frecuencia de 10^{-1} Hz para una anomalía resistiva en modo TE.

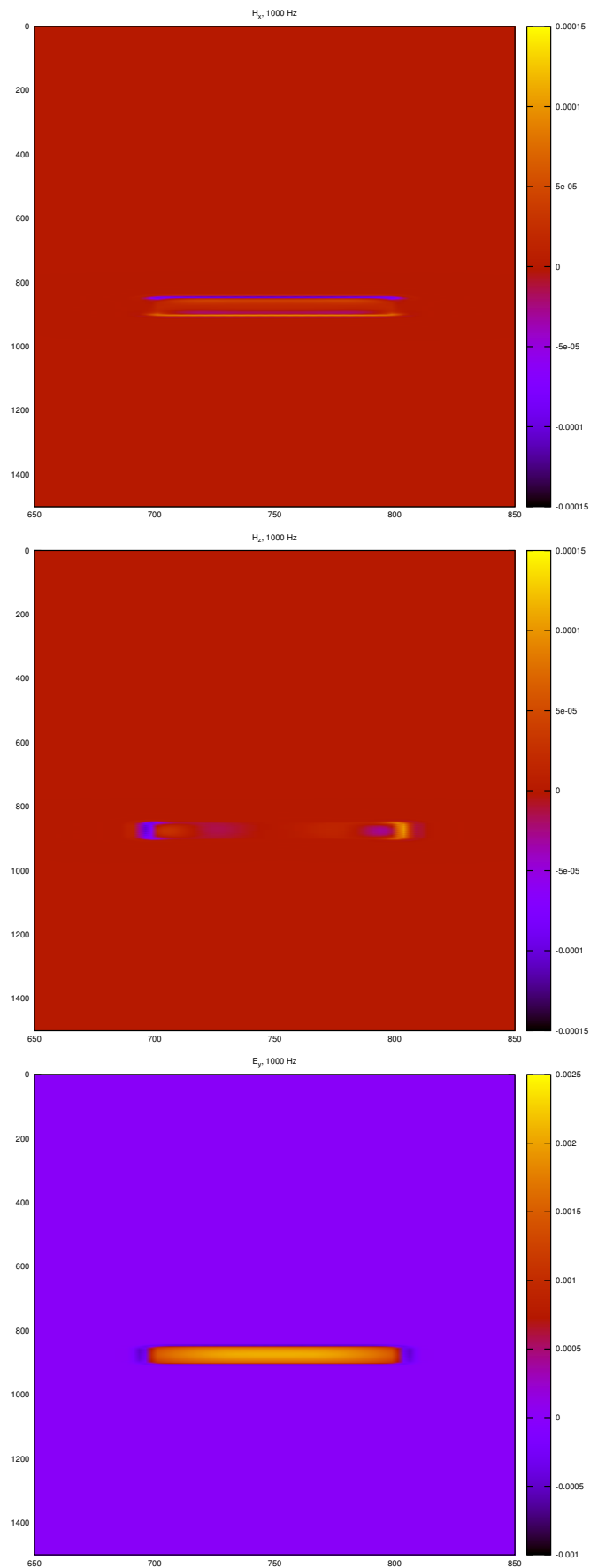


Figura 4.16: Campos EM a una frecuencia 1000 Hz para una anomalía conductiva en modo TE.

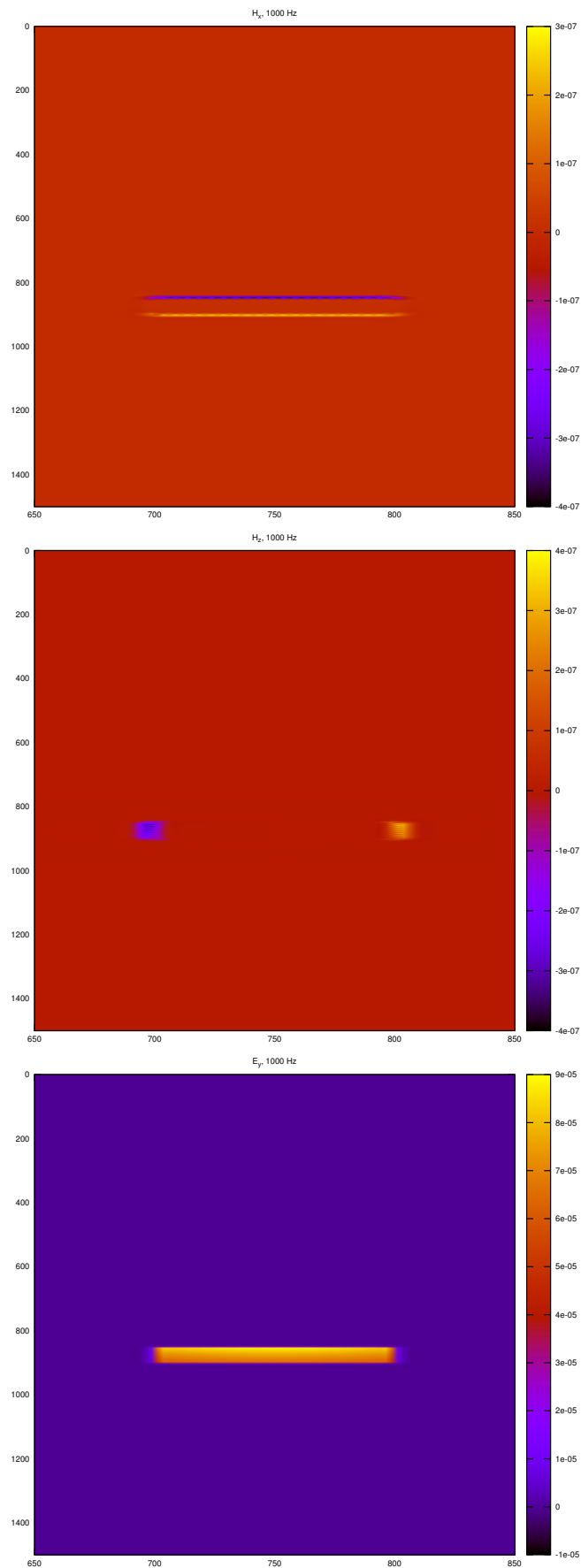


Figura 4.17: Campos EM a una frecuencia de 1000 Hz para una anomalía resistiva en modo TE.

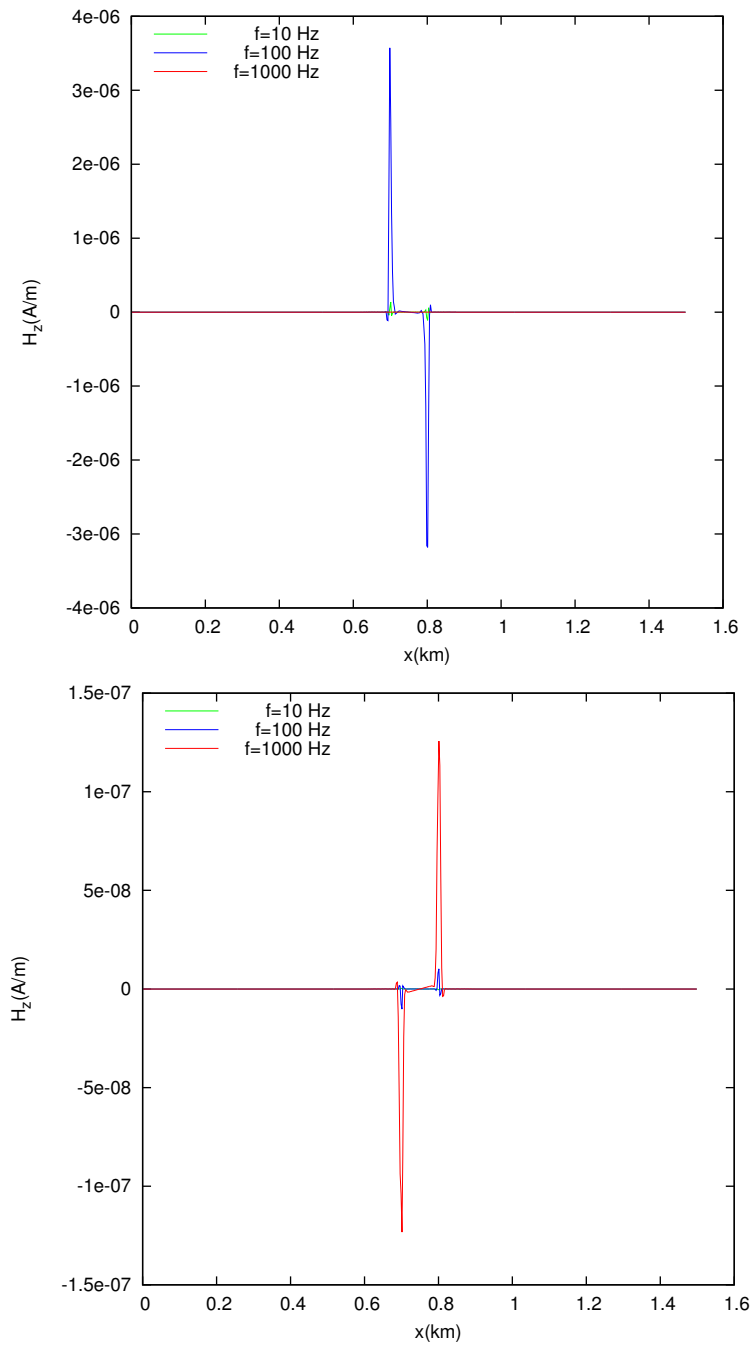


Figura 4.18: Componente H_z del modo TE a una profundidad de 901.25 m.

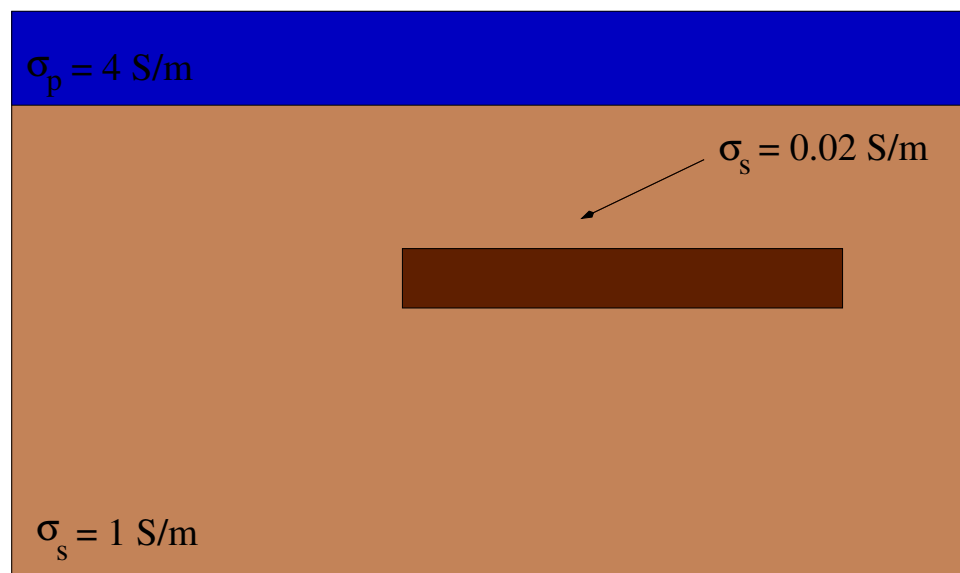


Figura 4.19: Distribución de conductividades para un reservorio petrolífero off-shore.

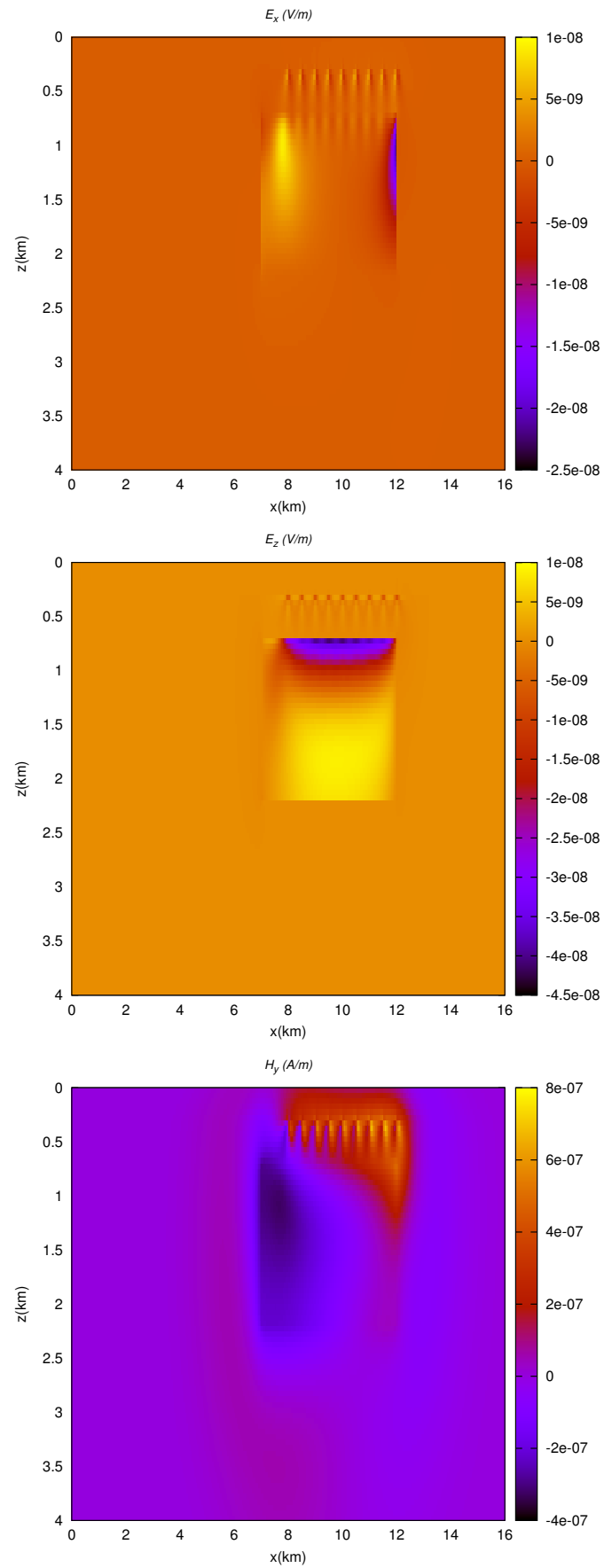


Figura 4.20: Campos EM en el modo TM para el caso de un reservorio petrolífero off-shore.

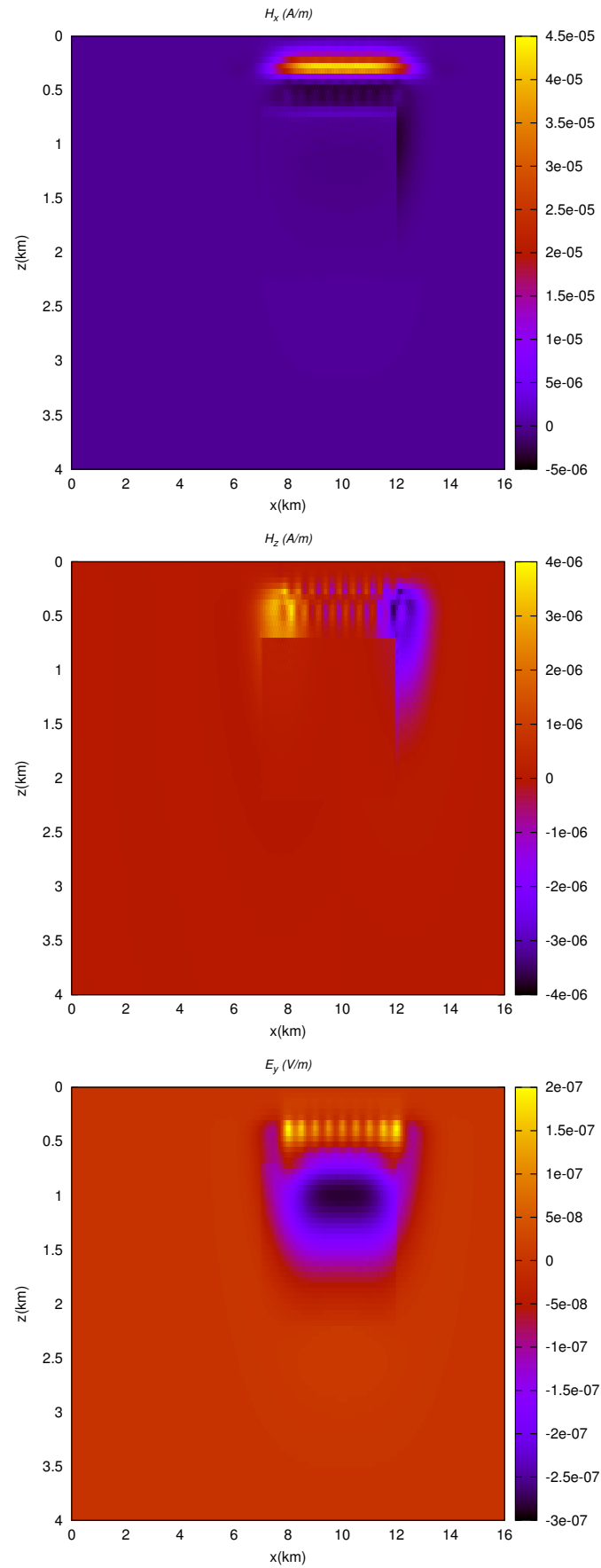


Figura 4.21: Campos EM en el modo TE para el caso de un reservorio petrolífero off-shore.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Los algoritmos empleados para calcular los campos electromagnéticos generados por fuentes eléctricas en dominios con distintas distribuciones de conductividad permiten caracterizar anomalías correspondientes a modelos sencillos de subsuelo. Las componentes de los campos electromagnéticos en ambos modos son sensibles a la ubicación y las dimensiones de las anomalías, en un amplio rango de frecuencias, exhibiendo un comportamiento coherente con lo esperado. Al momento de definir un dominio de cálculo, es de suma importancia el análisis de la longitud de penetración, de acuerdo a las frecuencias con las que se trabaja y a las distintas conductividades que caracterizan a un determinado modelo, definiendo una discretización adecuada para lograr una buena resolución y teniendo en cuenta los tiempos de cómputo. Dicho esto, es fundamental destacar el uso de computadoras de arquitectura paralela para la implementación de los algoritmos, ofreciendo una gran ventaja al permitir la obtención de buenos resultados en tiempos razonables.

A futuro se proyecta trabajar con modelos complejos de subsuelo, en dos y tres dimensiones, y con conductividades que no sean arbitrarias, sino provenientes de analizar cualidades de materiales rocosos, tales como la porosidad y la permeabilidad. Además se evaluará la factibilidad de la técnica en problemáticas de tipo medioambiental y vinculadas a recursos renovables. Asimismo, se buscará analizar el comportamiento de los campos electromagnéticos debido a otras fuentes eléctricas y de origen magnético. En virtud de lo mencionado, será preciso desarrollar nuevos algoritmos para la resolución de las problemáticas mencionadas. Otra actividad fundamental a llevar a cabo es la comparación de los resultados con otros algoritmos, a los fines de validar los códigos desarrollados. Por último, al modelado se le sumará inversión probabilística en 2D y 3D, existiendo la posibilidad incluso de agregar modelos de conductividad 2.5D.

BIBLIOGRAFÍA

- Adams, R. A., 1976, Sobolev spaces: Academic Press.
- Arnold, D. N., y Brezzi, F., 1985, Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates: R.A.I.R.O. Modélisation, Mathématique et Analyse Numérique, **9**, 7–32.
- Beckie, R., Wood, E., y Aldama, A., 1993, Mixed finite element simulation of saturated groundwater flow using a multigrid accelerated domain decomposition technique: Water Resources Research, **29**, no. 9, 3145–3157.
- Brenner, S. C., y Scott, L. R., 1994, The mathematical theory of finite element methods:, volumen 15 de **Texts in Applied Mathematics** Springer.
- Carey, G. F., y Oden, J. T., 1983, Finite elements: a second course:, volumen 2 de **The Texas finite element series** Prentice-Hall.
- Constable, S., y Srnka, L. I., 2007, An introduction to marine controlled-source electromagnetic methods for hydrocarbon exploration: Geophysics, **72**, WA3–WA12.
- Després, B., Joly, P., y Roberts, J. E., 1992, A domain decomposition method for the harmonic maxwell equations, *in* Beauwens, R., y de Groen, P., Eds., Iterative Methods in Linear Algebra: Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 475–484.
- Douglas, J., Leme, P. P., Pereira, F., y Yeh, L., 1993a, A massively parallel iterative numerical algorithm for immiscible flow in naturally fractured reservoirs: Int. Series of Numer. Math., **114**, 75–93.
- 1993b, A parallel iterative procedure applicable to the approximate solution of second order partial differential equations by mixed finite element methods: Numer. Math., **65**, 95–108.
- Eidesmo, T., Ellingsrud, S., MacGregor, L., Constable, S., Sinha, M., Johansen, S., Kong, F., y Westerdahl, H., 2002, Sea bed logging (sbl), a new method for remote and direct identification of hydrocarbon filled layers in deepwater areas: First Break, **20**, 144–152.
- Ellingsrud, S., Sinha, M., Constable, S., MacGregor, L., Eidesmo, T., y Johansen, S., 2002, Remote sensing of hydrocarbon layers by sea bed logging (sbl): results from a cruise offshore angola: The Leading Edge, **21**, 972–982.

- Girault, V., y Raviart, P., 1981, Finite element approximation of the Navier-Stokes equations; Lecture notes in Mathematics Springer.
- Griffiths, D. J., 1999, Introduction to electrodynamics: Prentice Hall.
- Keyes, D. E., Chan, T. F., Meurant, G., Scroggs, J. S., y Voigt, R. G., Eds., 1992, Fifth international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations American Mathematical Society.
- Keyes, D. E., y Xu, J., Eds., 1994, Domain decomposition methods in science and engineering computing, volumen 180 de **Contemporary mathematics** American Mathematical Society.
- Kim, S., 1995, Domain decomposition methods for contaminant transport in fractured porous media: Ph.D. thesis, Purdue University.
- Lee, R. L., y Masden, N. K., 1990, A mixed finite element formulation for Maxwell's equations in the time domain: J. Comput. Phys., **88**, 284–304.
- L.O. LosethT. Wiik, P. O., y Hansen, J., 2014, Detecting skrugard by csem - prewell prediction and postwell evaluation: Interpretation, **2**, SH67–SH77.
- Monk, P., 1992, A comparison of three mixed methods for the time dependent Maxwell's equations: SIAM J. Sci. Stat. Comput., **13**, no. 5, 1097–1122.
- Monk, P., 1993, An analysis of Nédélec's method for the spatial discretization of Maxwell's equations: J. Comput. App. Math., **47**, 101–121.
- Mosé, R., Siegel, P., Ackerer, P., y Chavent, G., 1994, Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity?: Water Resources Research, **30**, no. 11, 3001–3012.
- Nédélec, J., 1980, Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 : Numer. Math., pages 315–341.
- S. Fanavoll, P. G., y Ellingsrud, S., 2014, Csem as a tool for better exploration decisions: Case studies from the barents sea, norwegian continental shelf: Interpretation, **2**, SH55–SH66.
- Santos, J. E., 1998, Global and domain decomposed mixed methods for the solution of maxwell's equations with application to magnetotellurics: Numerical Methods for Partial Differential Equations, **14**, 407–437.
- Stefatos, A., Vereshagin, A., Hesthammer, J., Kalsto, T., Sperrevik, S., y Robson, A., 2014, Csem-driven exploration over the nordland ridge: Interpretation, **2**, SH79–SH95.

- Ward, S., y Hohmann, G. W., 1987, Electromagnetic theory for geophysical applications, *in* Nabighian, M., Ed., Electromagnetic methods in applied geophysics: SEG, Investigation in Geophysics, Vol. 1, 3, 131–311.
- Zhdanov, M. S., 2009, Geophysical Electromagnetic Theory and Methods: Elsevier.
- Zyserman, F. I., Guarracino, L., y Santos, J. E., 1999, A hybridized mixed finite element domain decomposed method for two dimensional magnetotelluric modelling: Earth, Planets and Space, **51**, no. 4, 297–306.
- Zyserman, F. I., 2000, Simulación numérica de difusión electromagnética en el subsuelo terrestre: Ph.D. thesis, Fac. de Cs. Exactas, UNLP.